

UNIVERSITÄT  
OSNABRÜCK

# ACHSENSPIEGELUNG UND -SYMMETRIE IN DER GRUND- SCHULE

Eine theoretische und empirische Auseinandersetzung mit für das Unterrichten zentralen Facetten professionellen Wissens

Dissertation (kumulativ)  
zur Erlangung des Doktorgrades (Dr. rer. nat.)  
des Fachbereichs Mathematik/Informatik  
der Universität Osnabrück

vorgelegt von

**Daniela Götz**

aus München

Osnabrück, Dezember 2020



**Wissenschaftliche Betreuung der Arbeit:** Prof. Dr. Hedwig Gasteiger (Universität Osnabrück)

**Tag der Disputation:** 17. März 2021

**Dekan:** Prof. Dr. Tim Römer

**Erstgutachterin:** Prof. Dr. Hedwig Gasteiger (Universität Osnabrück)

**Zweitgutachterin:** Prof. Dr. Kristina Reiss (Technische Universität München)

**Weitere Mitglieder der Prüfungskommission:**

Jun.-Prof. Dr. Alexander Salle (Universität Osnabrück)

Dr. Solveig Jensen (Universität Osnabrück)



# **Achsen Spiegelung und -symmetrie in der Grundschule**

Eine theoretische und empirische Auseinandersetzung  
mit für das Unterrichten zentralen Facetten  
professionellen Wissens



## Dank

Bedanken möchte ich mich an dieser Stelle ganz herzlich bei allen, die durch ihre Unterstützung zum Gelingen dieser Doktorarbeit beigetragen haben.

Allen voran gilt dieser Dank meiner Betreuerin und Erstgutachterin Frau Prof. Dr. Hedwig Gasteiger. Ihr möchte ich für die vielen wertvollen, kritisch-konstruktiven Anregungen, ihr Vertrauen, ihre Unterstützung und den Rückhalt, den sie mir in allen Phasen meiner Promotion gegeben hat, von ganzem Herzen danken. Meiner Zweitgutachterin Frau Prof. Dr. Kristina Reiss danke ich für ihr Interesse an der Arbeit und ihre Bereitschaft diese zu begutachten.

Einige Inhalte und Ergebnisse dieser Arbeit entstanden durch die Kooperation mit dem Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB). An dieser Stelle möchte ich mich für die gute Kooperation, die Bereitstellung der Daten und die Möglichkeit, diese in meiner Forschungsarbeit zu verwenden, bedanken.

Ein großer Dank geht an meine Kolleginnen und Kollegen des Lehrstuhls für Mathematikdidaktik an der Ludwig-Maximilians-Universität München sowie der AG Mathematikdidaktik am Institut für Mathematik und Informatik der Universität Osnabrück, die mich in vielerlei Hinsicht – privat wie auch beruflich – unterstützt haben. Insbesondere Sarah Ottinger und Stefanie Schumacher danke ich für ihre konstruktiven Anregungen, ihr Feedback, ihr stets offenes Ohr und den persönlichen Rückhalt, den sie mir in allen Phasen dieser Dissertation gegeben haben. Ein weiterer Dank geht an meine Kolleginnen und Kollegen am Lehrstuhl Empirische Bildungsforschung der Universität Würzburg, die mir in der letzten Phase des Schreibens den Rücken freigehalten haben.

Bei allen beteiligten Bachelor- und Master-Studierenden, Hilfskräften, Schülerinnen und Schülern sowie Lehrkräften, die zu dieser Arbeit beigetragen haben, bedanke ich mich!

Familie und Freunde haben mir in der Zeit der Entstehung dieser Arbeit aus nah und fern persönlichen Rückhalt gegeben, unterstützende und ermutigende Worte gefunden und hatten stets ein offenes Ohr – auch bis spät in die Nacht hinein. Silja Bauer möchte ich an dieser Stelle für ihre Begleitung auf diesem Weg von Anfang bis Ende danken, sie war mir insbesondere gegen Ende der Arbeit eine wertvolle Unterstützung.

Vielen Dank dafür!



# Inhalt

<b>Liste der Publikationen</b> .....	<b>12</b>
<b>Einleitung</b> .....	<b>13</b>
<b>1 Wissen als Teil professioneller Kompetenz von Lehrkräften</b> .....	<b>16</b>
1.1 Professionelles Wissen von Lehrerinnen und Lehrern .....	17
1.1.1 Professionelles Wissen in Modellen der Lehrerprofessionsforschung.....	19
1.1.2 Inhaltsbezogene Facetten des professionellen Wissens .....	21
1.2 Begriffsklärung und Positionierung für die vorliegende Arbeit .....	30
1.2.1 Curriculares Wissen .....	30
1.2.2 Fachwissen .....	30
1.2.3 Fachdidaktisches Wissen.....	31
1.2.4 Diagnostisches Wissen .....	31
<b>2 Zentrale Wissensfacetten mit dem Fokus auf das Unterrichten von Symmetrie und Achsenspiegelung</b> .....	<b>34</b>
2.1 Curriculares Wissen mit dem Fokus auf das Unterrichten von Symmetrie und Achsenspiegelung.....	34
2.1.1 Geometrische Inhalte in der elementaren mathematischen Bildung .....	34
2.1.2 Kompetenzerwartungen an allgemeinbildenden Schulen.....	35
2.2 Fachwissen mit dem Fokus auf das Unterrichten von Symmetrie und Achsenspiegelung.....	37
2.2.1 Begriffsdefinition Symmetrie.....	38
2.2.2 Kongruenzabbildungen der Ebene.....	38
2.2.3 Merkmale symmetrischer Figuren.....	41
2.3 Fachdidaktisches Wissen mit dem Fokus auf das Unterrichten von Symmetrie und Achsenspiegelung.....	43
2.3.1 Sequenzierung der Unterrichtsinhalte und Aufgabenauswahl .....	44
2.3.2 Wissen um Aufgaben und deren Schwierigkeiten.....	47
2.3.3 Wissen um typische Fehler und Fehlvorstellungen.....	52
2.3.4 Wissen um Strategien.....	57
2.4 Diagnostisches Wissen mit dem Fokus auf das Unterrichten von Symmetrie und Achsenspiegelung.....	58

2.4.1	Pädagogisch-psychologische Bezüge des diagnostischen Wissens im Kontext Symmetrie und Achsenspiegelung .....	59
2.4.2	Fachdidaktische Bezüge diagnostischen Wissens im Kontext Symmetrie und Achsenspiegelung.....	62
2.4.3	Curriculare Bezüge zum diagnostischen Wissen im Kontext Symmetrie und Achsenspiegelung.....	64
<b>3</b>	<b>Forschungsdiesiderate bezüglich des inhaltspezifischen professionellen Wissens von Lehrkräften zu Symmetrie und Achsenspiegelung im Unterricht der Grundschule.....</b>	<b>66</b>
3.1	Curriculares Wissen.....	66
3.2	Fachliches Wissen.....	67
3.3	Fachdidaktisches Wissen.....	68
3.4	Diagnostisches Wissen.....	70
<b>4</b>	<b>Forschungsschwerpunkte.....</b>	<b>72</b>
4.1	Forschungsschwerpunkt 1: Wissen zu Aufgabenmerkmalen im Bereich Symmetrie und Achsenspiegelung.....	72
4.1.1	Merkmale von Aufgaben zur Achsenspiegelung und deren Ausprägungen .....	72
4.1.2	Merkmale von Aufgaben zur Achsenspiegelung und deren Spezifika beim unterrichtlichen Einsatz .....	73
4.1.3	Merkmale von Aufgaben im Inhaltsbereich Symmetrie .....	74
4.2	Forschungsschwerpunkt 2: Wissen über das mathematische Denken von Schülerinnen und Schülern bei der Achsenspiegelung.....	75
4.2.1	Kriterien, die Grundschul Kinder bei der Spiegelung ebener Figuren heranziehen ....	75
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung der Ergebnisse .....</b>	<b>77</b>
5.1	Wissen zu Aufgabenmerkmalen im Bereich Symmetrie und Achsenspiegelung.....	77
5.1.1	Merkmale von Aufgaben zur Achsenspiegelung und deren Ausprägungen .....	77
5.1.2	Fehler bei Aufgaben zur Achsenspiegelung .....	81
5.1.3	Aufgabenmerkmale mit Einfluss auf das Lösen von Symmetrieaufgaben .....	87
5.1.4	Fehler bei Aufgaben zum Erkennen achsensymmetrischer Figuren und dem Einzeichnen von Symmetrieachsen.....	91
5.2	Wissen über das mathematische Denken von Schülerinnen und Schülern bei der Achsenspiegelung.....	93
5.2.1	Herangehensweisen von Grundschulkindern bei der Spiegelung ebener Figuren ....	94
<b>6</b>	<b>Diskussion .....</b>	<b>102</b>
6.1	Kritische Reflexion der Studien .....	102

6.1.1	Stichprobe.....	102
6.1.2	Studiendesign.....	103
6.1.3	Testinstrumente .....	103
6.1.4	Aufgabenmaterial .....	104
6.2	Interpretation der Ergebnisse zum Inhaltsbereich Achsenspiegelung .....	105
6.2.1	Synthese der Ergebnisse zur Achsenspiegelung – diskutiert entlang schwierigkeitsgenerierender Aufgabenmerkmale .....	105
6.2.2	Schlussfolgerungen auf das zugrundeliegende Verständnis von Achsenspiegelungen .....	111
6.3	Interpretation der Ergebnisse zum Inhaltsbereich Achsensymmetrie .....	114
6.3.1	Synthese der Ergebnisse zur Achsensymmetrie – diskutiert entlang der Merkmale von Figuren .....	115
6.3.2	Schlussfolgerungen auf das Verständnis von Achsensymmetrie .....	118
6.4	Zusammenfassendes Resümee und Forschungsperspektiven .....	120
<b>7</b>	<b>Implikationen und Fazit .....</b>	<b>125</b>
7.1	Konsequenzen für die Praxis.....	125
7.1.1	Handlungsgerüst zur Erstellung adäquater Aufgaben.....	125
7.1.2	Handlungsgerüst zum adäquaten Materialeinsatz.....	126
7.2	Fazit.....	127
	<b>Literatur .....</b>	<b>129</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis .....</b>	<b>137</b>
	<b>Tabellenverzeichnis .....</b>	<b>139</b>
	<b>Eigenständigkeit .....</b>	<b>140</b>

## Liste der Publikationen

### Publikationen in Peer-Review

- Götz, D., & Gasteiger, H. (2019). Anforderungen bei der Achsenspiegelung. Ein empirisch gestütztes Kategorienschema. *Journal für Mathematik-Didaktik* 40(2), 289–322. <https://doi.org/10.1007/s13138-019-00145-z>.
- Götz, D., Gasteiger, H., & Kühnhenrich, M. (2020). Einfluss von Merkmalen ebener Figuren auf das Erkennen von Achsensymmetrie – Eine Analyse von Aufgabenlösungen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 41(2), 523–554. <https://doi.org/10.1007/s13138-020-00163-2>.
- Götz, D., & Gasteiger, H. (2022). Reflecting geometrical shapes: approaches of primary students to reflection tasks and relations to typical error patterns. *Educational Studies in Mathematics*. <https://doi.org/10.1007/s10649-022-10145-5>.

### Publikationen in Tagungsbänden

- Götz, D. (2018). Typische Schülerfehler bei der Bestimmung von Symmetrieachsen – Eine Analyse von Schülerantworten. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Inhalte im Fokus – Mathematische Strategien entwickeln: Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2018* (S. 85-88). Bamberg: University of Bamberg Press.
- Götz, D., & Gasteiger, H. (2018a). Typische Schülerfehler bei der Achsenspiegelung – Eine Analyse von Schülerantworten. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (S. 631–634). Münster: WTM.
- Götz, D., & Gasteiger, H. (2018b). *Typische Schülerfehler bei der Achsenspiegelung – Eine Analyse von Schülerantworten*. Vortrag auf der 52. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM), Paderborn, 05.03. - 09.03.2018.
- Götz, D., & Gasteiger, H. (2020). Schwierigkeitsgenerierende Merkmale bei Aufgaben zur Achsenspiegelung. In A. Frank, S. Krauss & K. Binder (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2019* (S. 269–272). Münster: WTM-Verlag.

### Publikationen in Praxisbänden

- Götz, D., & Schulz, A. (2018). Aus Fehlern lernen. Schülerlösungen als Ausgangspunkt für Diagnose und Unterricht. *Grundschulmagazin*, 4, 33-37.
- Götz, D. (2020). Die Rolle spezifischer Merkmale von Aufgaben zur Achsenspiegelung unter Berücksichtigung didaktischer und diagnostischer Aspekte. *Der Mathematikunterricht*, 66(6), 4–11.

## Einleitung

*“Wenn ich nicht irre, wird das Wort Symmetrie in unserer Umgangssprache in zwei Bedeutungen gebraucht. In dem einen Sinn bedeutet symmetrisch etwas wie wohlproportioniert, ausgeglichen, und Symmetrie bezeichnet jede Art der Konkordanz mehrerer Teile, durch welche sie sich zu einem Ganzen zusammenschließen. [...] Das Bild der Waage bietet einen natürlichen Übergang zu dem zweiten Sinn, in dem das Wort Symmetrie heutzutage gebraucht wird: bilaterale Symmetrie, die Symmetrie von links und rechts, die so stark in der Struktur der höheren Tiere, insbesondere des menschlichen Körpers, hervortritt. Die bilaterale Symmetrie ist aber ein rein geometrischer und, im Gegensatz zu der oben besprochenen vagen Vorstellung von Symmetrie, ein absolut präziser Begriff.”*

HERMANN WEYL (1980; zitiert nach Weyl et al. 2017, S.13)

Anhand dieses Zitats von Hermann Weyl (2017) lässt sich bereits die Komplexität erahnen, der Grundschülerinnen und Grundschüler beim Erlernen des Begriffes Symmetrie gegenüberstehen. Auf der einen Seite steht der doch so alltägliche Begriff der Symmetrie als etwas Wohlproportioniertes, den auch Kinder schon zu Schulbeginn kennen – auf der anderen Seite, der mathematisch-geometrisch, präzise definierte Begriff, welcher im Laufe der Schulzeit im Rahmen des Geometrieunterrichts erlernt werden soll.

Vom Kindergarten an bis zur Universität ist die Symmetrie ein zentrales mathematisches Konzept, das immer wieder thematisiert wird. Als „Grundidee der Elementargeometrie“ (Wittmann 1999, S. 210) ist sie auch fachmathematisch von Interesse. Im Sinne der Propädeutik ist es zwingend erforderlich, ein fachlich anschlussfähiges Verständnis von Symmetrie und Achsenspiegelung (als dazugehöriger Kongruenzabbildung) im Geometrieunterricht der Grundschule anzubahnen. Im Geometrieunterricht der Grundschule werden in der Regel vor allem die Themen „Erkennen achsensymmetrischer Figuren“ sowie die „Spiegelung an einer Achse“ angesprochen (bspw. KMK 2005; auch Niedersächsisches Kultusministerium 2017). Diese Vorgaben sind vergleichsweise allgemein. Geht es darum diese Inhalte anschlussfähig zu unterrichten, kommt der Lehrkraft eine entscheidende Rolle zu, da die didaktische Vorbereitung und Inszenierung des konkreten Unterrichts als zentrale Aufgabe bei der einzelnen Lehrkraft verbleibt (Tenorth 2006; Terhart 2002). Das professionelle Wissen von Lehrerinnen und Lehrern spielt als Teil professionellen Lehrerhandelns eine entscheidende Rolle bei der Planung und Durchführung von Unterricht (Baumert & Kunter 2006). Aktuelle Studien aus der Lehrerbildungsforschung schreiben insbesondere dem fachlichen sowie dem fachdidaktischen

Wissen der Lehrperson einen entscheidenden Einfluss auf den Lernerfolg der Schülerinnen und Schüler zu (u. a. Kunter et al. 2013).

Wissen, auf das Lehrerinnen und Lehrer zurückgreifen können, um im Geometrieunterricht der Grundschule sinnvoll begründete, fachdidaktische Entscheidungen treffen zu können und somit letztendlich den Lernerfolg der Schülerinnen und Schüler positiv zu beeinflussen, liegt bisher nur vereinzelt vor. Studien, die wichtige Wissensgrundlagen für das Unterrichten von Symmetrie und Achsenspiegelung liefern, sind nicht immer grundschulspezifisch ausdifferenziert oder präzisieren entscheidende Inhalte (wie beispielsweise auftretende Fehler oder schwierigkeitsgenerierende Merkmale) noch zu wenig bzw. sind die Ergebnisse vorhandener Studien noch zu wenig belastbar.

Die vorliegende Arbeit setzt sich daher als Ziel, Wissen zu schaffen, welches es Lehrerinnen und Lehrern ermöglicht, Symmetrie und Achsenspiegelung in der Grundschule anschlussfähig zu unterrichten und ein solides, fachgebundenes Verständnis bei den Schülerinnen und Schülern aufzubauen. Mit diesem Ziel werden inhaltspezifisch relevante Facetten professionellen Wissens von Lehrerinnen und Lehrern in Modellen der Lehrerprofessionsforschung identifiziert und in Verbindung mit bereits vorliegendem Wissen aus dem Bereich der Symmetrie und Achsenspiegelung gebracht. Dadurch soll eine empirisch fundierte und systematische Wissensgrundlage generiert werden, welche als Ausgangspunkt dienen kann, Symmetrie und Achsenspiegelung als Grundschullehrkraft so zu unterrichten, dass ein fachlich anschlussfähiges Verständnis vermittelt werden kann.

In den ersten drei Kapiteln dieser Arbeit wird ein theoretischer Rahmen geschaffen, aus dem zum einen die Forschungsdesiderate für die vorliegende Arbeit abgeleitet werden. Zum anderen bilden diese Kapitel auch die inhaltliche Grundlage zur Entwicklung der in dieser Arbeit eingesetzten Aufgaben.

Im ersten Kapitel erfolgt zunächst eine Zusammenschau verschiedener Modelle aus der Lehrerprofessionsforschung (u. a. Shulman 1986; Baumert & Kunter 2006, 2011; Loewenberg Ball, Thames & Phelps 2008), die zentrale Wissensfacetten professioneller Kompetenz von Lehrerinnen und Lehrern beschreiben. Dabei werden die als grundlegend für eine erfolgreiche Gestaltung von Unterricht bezüglich Symmetrie und Achsenspiegelung erachteten Facetten herausgearbeitet und für diese Arbeit definiert.

Die in Kapitel 1 konkretisierten, relevanten inhaltsbezogenen Wissensfacetten *Fachwissen*, *curriculares Wissen*, *fachdidaktisches Wissen* und *diagnostisches Wissen* werden mit dem Fokus

auf das Unterrichten der Inhalte Symmetrie und Achsenspiegelung in Kapitel 2 konkretisiert und detailliert beschrieben. Die entsprechenden Unterkapitel widmen sich der theoretischen und empirischen Klärung bereits vorhandenen Wissens, das den jeweiligen Facetten zugeordnet werden kann.

Im dritten Kapitel werden Forschungsdesiderate basierend auf den in Kapitel 2 beschriebenen, vorhandenen Erkenntnissen bezüglich des inhaltspezifischen professionellen Wissens von Lehrkräften zu Symmetrie und Achsenspiegelung im Unterricht der Grundschule abgeleitet. Anschließend werden die Forschungsschwerpunkte dieser Arbeit, welche in einzelnen Studien untersucht wurden, vorgestellt (Kapitel 4).

Das fünfte Kapitel widmet sich der Darstellung der Ergebnisse. Entsprechend der Forschungsschwerpunkte wird dieser Teil der Arbeit in zwei Teile gegliedert. Im ersten Teil (Unterkapitel 5.1) werden Ergebnisse zu Wissen zu Aufgabenmerkmalen im Bereich Symmetrie und Achsenspiegelung detailliert vorgestellt. Ergebnisse der qualitativen Interviewstudie zu Wissen über das mathematische Denken von Schülerinnen und Schülern bei der Achsenspiegelung schließen sich im zweiten Teil (Unterkapitel 5.2) an.

Die Ergebnisse aller Studien, die Teil dieser Arbeit sind, werden in Kapitel 6 diskutiert. Dazu erfolgt zunächst eine kritische Diskussion der Grenzen der durchgeführten Studien. Anschließend werden zentrale Befunde zur Achsenspiegelung und zur Achsensymmetrie jeweils resümiert und diskutiert. Abschließend werden die Ergebnisse aller Studien in Bezug auf die formulierten Forschungsdesiderate (Kapitel 3) vor dem Hintergrund professionellen Wissens von Lehrerinnen und Lehrern eingeordnet und Perspektiven für weitere Forschung aufgezeigt.

Im abschließenden siebten Kapitel werden auf Basis der vorliegenden Befunde dieser Arbeit Implikationen und offene Fragen in Bezug auf das Unterrichten von Symmetrie und Achsenspiegelung in der Grundschule diskutiert.

# 1 Wissen als Teil professioneller Kompetenz von Lehrkräften

Lehrerinnen und Lehrer sind zentrale Akteure im Bildungssystem und haben einen bedeutenden Einfluss auf das Lernen sowie die Entwicklung der Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern (Bromme 1997, S. 178). Eine zentrale Rolle spielt dabei auch das Wissen, über welches Lehrerinnen und Lehrer verfügen, um Inhalte des Faches Mathematik und – bezogen auf diese Arbeit – Inhalte der Symmetrie und Achsenspiegelung anschlussfähig und verständnisorientiert zu unterrichten. Modelle aus der Lehrerverberufsforschung beschreiben Aspekte professioneller Kompetenz und identifizieren zentrale Wissensfacetten von Lehrerinnen und Lehrern, die als grundlegend erachtet werden, um Unterricht erfolgreich zu gestalten.

Professionelle Kompetenz kann dabei angelehnt an den Kompetenzbegriff nach Weinert (2001) verstanden werden als „*ein Zusammenspiel aus spezifischem, erfahrungsgesättigtem deklarativem und prozeduralem Wissen [...]; professionellen Werten, Überzeugungen, subjektiven Theorien, normativen Präferenzen und Zielen; motivationalen Orientierungen sowie metakognitiven Fähigkeiten und Fähigkeiten professioneller Selbstregulation.*“ (Baumert & Kunter 2006, S. 481). Professionelle Kompetenz setzt sich ergo aus motivationalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten sowie kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten zusammen. Geht es darum, herauszuarbeiten, welche Voraussetzungen aus fachdidaktischer Sicht bei Lehrerinnen und Lehrern gegeben sein sollten, um Inhalte der Symmetrie und Achsenspiegelung in der Grundschule anschlussfähig zu unterrichten, so ist insbesondere die Auseinandersetzung mit *spezifischem, erfahrungsgesättigtem deklarativem und prozeduralem Wissen* (s.o.) von Bedeutung, da vor allem dieses Wissen einen starken Inhaltsbezug aufweist. Aus diesem Grund fokussiert die hier vorliegende Arbeit das Wissen von Lehrerinnen und Lehrern. Wird von Wissen gesprochen, so wird dieses nicht gleichgesetzt mit Kompetenz; professionelles *Wissen* von Lehrerinnen und Lehrern stellt einen Teilbereich dieser dar und wird als zentrale Komponente der professionellen Handlungskompetenz gesehen (Baumert & Kunter 2006; vgl. auch Helmke & Weinert 1992).

Primäres Anliegen dieses ersten Kapitels ist es, zentrale Wissensfacetten von Lehrkräften, die eine Rolle bei der unterrichtlichen Vermittlung fachlicher Inhalte spielen, herauszuarbeiten und zu beschreiben. Modelle aus der Lehrerverberufsforschung werden als Ausgangspunkt herangezogen, um diese grundlegenden Wissensfacetten zu identifizieren und systematisch

zu beschreiben. In den darauffolgenden Kapiteln werden diese Wissensfacetten inhaltsspezifisch betrachtet bzw. spezifiziert. Ziel dabei ist es zu analysieren, über welches Wissen Lehrerinnen und Lehrer verfügen müssen, um Lernprozesse – bezogen auf den geometrischen Inhaltsbereich Symmetrie und Achsenspiegelung – erfolgreich und anschlussfähig gestalten zu können.

## 1.1 Professionelles Wissen von Lehrerinnen und Lehrern

Für einen ersten Überblick wird im Folgenden eine Zusammenschau unterschiedlicher Modelle aus der Lehrerprofessionsforschung (Ausführungen dazu vgl. Abschnitt 1.1.1) vorgenommen, die jene Facetten des professionellen Wissens darstellt, welchen für das Unterrichten im Allgemeinen eine große Bedeutung zugeschrieben wird (vgl. Abbildung 1). Die dargestellten Wissensfacetten in Abbildung 1 lassen sich in allgemeine und inhaltsbezogene Facetten des professionellen Wissens von Lehrkräften unterteilen, welche detaillierter in Abschnitt 1.1.1 betrachtet werden. Allgemeine Wissensfacetten – wie beispielsweise pädagogisches Wissen oder auch Wissen in Bezug auf Klassenführung oder Beratungs- und Organisationswissen – sind in jedem Fach und bei jedem Inhalt von Bedeutung. Für die hier vorliegende Arbeit sind jedoch vorwiegend diejenigen Facetten professionellen Wissens von Bedeutung, die einen inhaltlichen Bezug aufweisen und folglich einen Einfluss auf die Gestaltung inhaltlich-mathematischer Lerngelegenheiten haben (vgl. Abbildung 1, dick umrandete Felder).

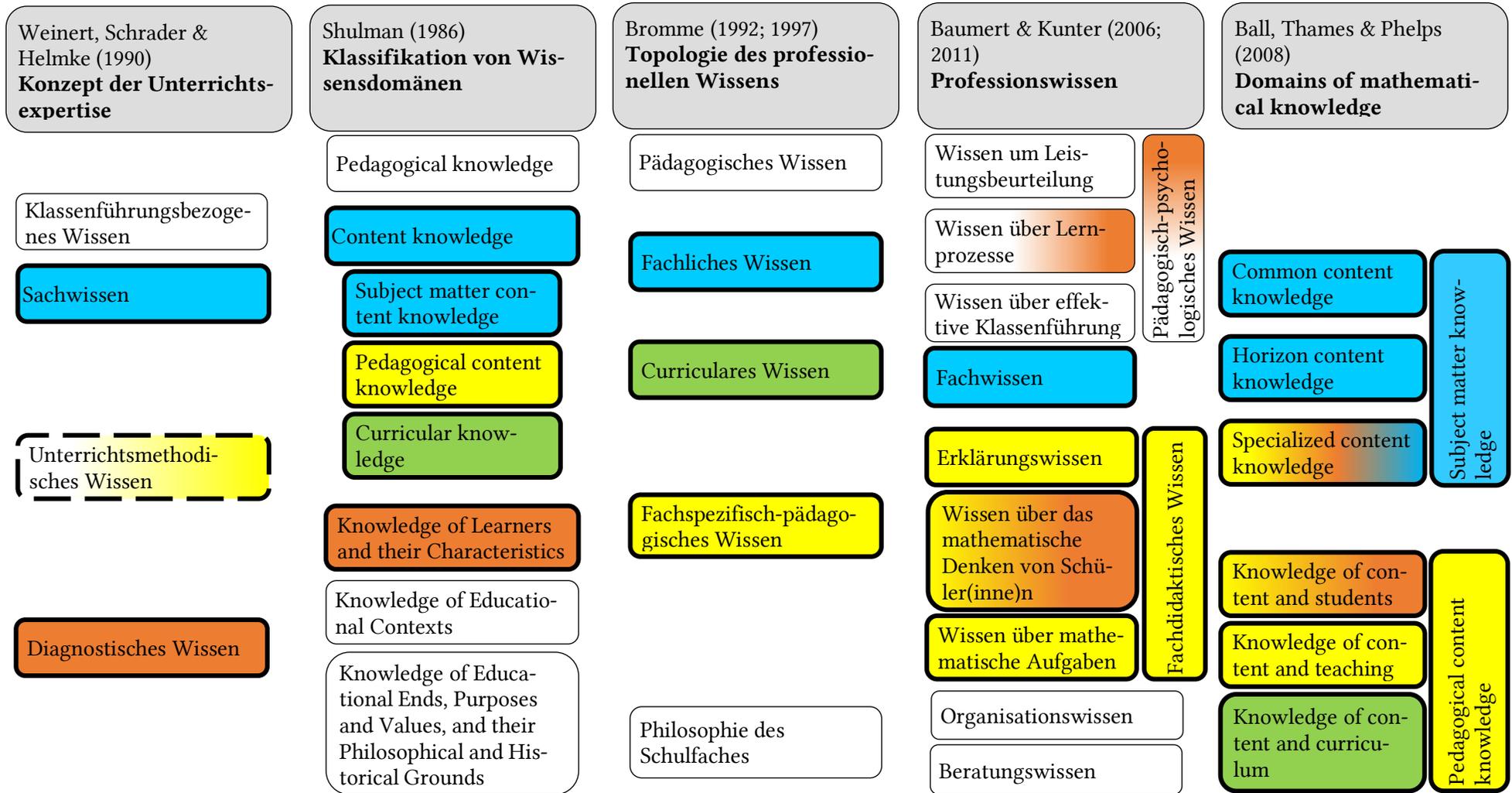


Abbildung 1: Überblick über Facetten des professionellen Wissens für das Unterrichten im Allgemeinen (dick umrandet: inhaltsbezogene Facetten; gestrichelt umrandet: teils inhaltsbezogene Facetten; in blau: Facetten des Fachwissens; in gelb: Facetten des fachdidaktischen Wissens; in grün: Facetten des curricularen Wissens; in orange: Facetten des diagnostischen Wissens).

### 1.1.1 Professionelles Wissen in Modellen der Lehrerverberufsforschung

Den Modellen in Abbildung 1 liegen unterschiedliche theoretische Kontexte und Blickwinkel auf das Handeln von Lehrerinnen und Lehrern zugrunde. Um zentrale inhaltsbezogene bzw. fachspezifische Wissensaspekte über die Modelle hinweg besser einordnen und inhaltlich nachvollziehen zu können, ist es hilfreich, die Kernanliegen dieser Modelle zunächst zu skizzieren und einzuordnen.

Einige dieser theoretischen Auseinandersetzungen mit dem professionellen Wissen lassen sich als nicht fachspezifisch charakterisieren (wie bspw. Weinert, Schrader & Helmke (1990) oder Shulman (1986)). Diese allgemeinen, nicht fachspezifischen Auseinandersetzungen dienen als Ausgangspunkt, um zentrale, handlungsleitende Wissensfacetten von Lehrerinnen und Lehrern herauszuarbeiten und stellen Facetten des Wissens von Lehrerinnen und Lehrern dar, die in allen Fächern von Bedeutung sind. Weinert, Schrader und Helmke (1990) charakterisieren diesbezüglich zentrale kognitive Komponenten der Lehrerexpertise<sup>1</sup>. Mit dem Ziel, Wissenssysteme zu identifizieren, die eine Rolle im unterrichtlichen Handeln spielen, unterscheiden Weinert et al. (1990) *klassenführungsbezogenes Wissen*, *unterrichtsmethodisches Wissen*, *Sachwissen* und *diagnostisches Wissen* als vier unterschiedliche zentrale kognitive Komponenten. Die Autoren verbleiben in ihrer Beschreibung dieser Komponenten (auch des Sachwissens) bewusst allgemein und nicht fachspezifisch und konstatieren, dass die Nutzung dieser vier Wissenssysteme zwar theoretisch trennbar ist, diese im unterrichtlichen Handeln jedoch oft verknüpft sind (Weinert et al. 1990). Insbesondere die Einordnung des diagnostischen Wissens als zentrale Komponente der Lehrerexpertise sowie die enge Verknüpfung der Wissenssysteme sind für die hier vorliegende Arbeit von Bedeutung (vgl. Kapitel 2). Eine weitere allgemeine, nicht auf ein konkretes Fach bezogene Spezifizierung von Wissen, die im Kontext Lehrerverberufswissen international viel Bekanntheit erlangt hat, ist die Beschreibung verschiedener Kategorien des Wissens von Lehrerinnen und Lehrern nach Shulman (1986, 1987). Shulman (1986) unterscheidet zunächst pädagogisches Wissen (*pedagogical knowledge*) und inhaltliches Wissen (*content knowledge*). Letzteres unterteilt er in die drei Kategorien Fachwissen (*subject matter content knowledge*), fachdidaktisches Wissen (*pedagogical content knowledge*) und Wissen über das Fachcurriculum (*curricular knowledge*). Später erweitert Shulman

---

<sup>1</sup> Der Begriff der Lehrerexpertise wird in der hier vorliegenden Arbeit nicht weiter ausdifferenziert, da lediglich die verschiedenen Facetten und Aspekte von Lehrerverberuf betrachten werden. Spezifika der Lehrerexpertiseforschung werden deshalb nicht detailliert betrachtet.

(1987) diese Kategorien um drei weitere: *Knowledge of Learners and their Characteristics*, *Knowledge of Educational Contexts* und *Knowledge of Educational Ends, Purposes and Values, and their Philosophical and Historical Grounds*. Im Zentrum des Interesses steht für Shulman das ‚how‘ der Wissensvermittlung (also das fachdidaktische Wissen), während für ihn das fachliche Wissen (also das ‚what‘) in den Hintergrund tritt.

Bromme (1992, 2008) übernimmt einige der Wissenskategorien Shulmans in seiner Arbeit und entwickelt daraus seine „Topologie<sup>2</sup> des professionellen Lehrerwissens“ (Bromme 1992, S. 96). Die Topologie Brommes ist im Vergleich zu den nicht fachspezifisch differenzierten Modellen von Weinert et al. (1990) sowie von Shulman (1986, 1987) fachspezifisch für das Fach Mathematik konkretisiert. Den Begriff der Topologie wählte Bromme (1992) mit der Intention „*die Grundelemente des professionellen Wissens und ihre Beziehung zu umreißen, die dann aber noch interindividuell sehr verschieden auftreten können*“ (Bromme 1992, S. 96). Wie auch bei Shulman steht das Wissen und die Expertise der Lehrkräfte bei Bromme im Vordergrund. Seine Topologie umfasst fünf Wissensbereiche (vgl. Abbildung 1): (1) fachliches Wissen, (2) curriculares Wissen<sup>3</sup>, (3) Philosophie des Schulfaches, (4) pädagogisches Wissen und (5) fachspezifisch pädagogisches Wissen.

Inhaltlich an den Modellen von Bromme (1992, 1997) und Shulman (1986, 1987) angelehnt, sind einige empirische Untersuchungen des Wissens von Lehrerinnen und Lehrern entstanden. Auch die deutschsprachige Lehrerprofessionsforschung baut auf diesen theoretischen Beschreibungen auf. Darunter befinden sich für das Fach Mathematik u. a. die Studien TEDS-M (Blömeke, Kaiser & Lehmann 2010) und COACTIV (Kunter et al. 2011). Im Modell der COACTIV-Studie (Baumert & Kunter 2006) steht die Konzeptualisierung und Messung fachspezifischen Professionswissens von Mathematiklehrkräften der Sekundarstufe im Mittelpunkt. Mögliche Auswirkungen des fachspezifischen Professionswissens auf die Leistungsentwicklung von Schülerinnen und Schülern werden ebenso in den Blick genommen. Angelehnt an den allgemeinen Kompetenzbegriff nach Weinert (2001) integrieren Baumert und Kunter (2006) allgemeine Kompetenzfacetten wie z. B. *Überzeugungen, Motivation* und *Selbst-*

---

<sup>2</sup> Dieser Begriff wurde in Anlehnung an den mathematischen Begriff gewählt: Lehre von den Eigenschaften geometrischer Gebilde, die bei Verzerrung invariant bleiben.

<sup>3</sup> Bromme (1992) spricht von „schulmathematischem Wissen“, 1997 benennt Bromme diesen Wissensbereich mit „curriculares Wissen“; im Folgenden wird der Verständlichkeit halber nur noch von curricularem Wissen gesprochen.

*regulation* in ihrem Modell. In der Ausdifferenzierung des (*Professions-*)Wissens in die Kompetenzfacetten (1) *Fachwissen*, (2) *fachdidaktisches Wissen*, (3) *pädagogisch-psychologisches Wissen* sowie (4) *Organisationswissen* und (5) *Beratungswissen* greifen die Autoren auf die Grundlagen des Aufbaus inhaltsbezogener Wissensfacetten der Modelle von Shulman (1986) und Bromme (1992; 1997) zurück.

Auch die Michigan-Gruppe um Loewenberg Ball (u. a. Ball, Hill & Bass 2005; Hill, Schilling & Ball 2004) operationalisiert professionelles Wissen von Lehrkräften im Fach Mathematik. Jedoch steht hier insbesondere das professionelle Fachwissen von Grundschullehrkräften im Fokus. Professionelles Fachwissen versteht die Gruppe um Loewenberg Ball als das mathematische Verständnis unterrichtsrelevanter Inhalte, welches fachdidaktisch bei der Planung und Durchführung des Mathematikunterrichts Anwendung finden muss. Professionelles Wissen der Lehrpersonen basiert für die Michigan-Gruppe mehr auf den Inhalten der Mathematik, die im Grundschulcurriculum verankert sind, als auf universitärem Wissen (Thames & Loewenberg Ball 2010). Die in der COACTIV-Studie und von der Michigan-Gruppe vorgenommene Operationalisierung der einzelnen Wissensfacetten mit Bezug auf das Unterrichtsfach Mathematik liefert einen Beitrag dazu, Wissen, über das Lehrerinnen und Lehrer verfügen sollten, ausdifferenzieren und inhaltlich zu präzisieren (vgl. Abschnitte 1.1.2.1 und 1.1.2.2).

Modelle und theoretische Auseinandersetzungen, welche für Lehrerinnen und Lehrer relevantes Wissen beschreiben, sind in ihren Grundanliegen durchaus heterogen und betten das Professionswissen von Lehrerinnen und Lehrern in unterschiedliche theoretische Rahmungen. Auch, wenn keine einheitlichen Begrifflichkeiten einzelner inhaltsbezogener Facetten des professionellen Wissens vorliegen, so zeigt sich in der Zusammenschau in Abbildung 1, dass sich inhaltliche Überschneidungen bzw. Äquivalenzen feststellen lassen. Im Folgenden sollen oben beschriebene Facetten, die einen fachspezifischen Charakter haben, auf den Mathematikunterricht bezogen betrachtet werden.

### 1.1.2 Inhaltsbezogene Facetten des professionellen Wissens

In diesem Abschnitt werden die Facetten der unterschiedlichen Modelle zusammengebracht, die einen fachspezifischen Charakter haben und sich inhaltlich ähneln (vgl. farbliche Markierungen in Abbildung 1). Dabei erfolgt eine Zusammenstellung der Inhalte dieser Facetten über die unterschiedlichen Modelle hinweg sowie eine präzise inhaltliche Beschreibung dieser Facetten mit fachspezifischem Charakter. In den sich anschließenden Unterkapiteln werden

diese Beschreibungen der Facetten dann für den Mathematikunterricht bzw. explizit für das Unterrichten der Inhalte Symmetrie und Achsenspiegelung konkretisiert.

Die bereits durch Shulman grundgelegten inhaltsbezogenen Kernfacetten professionellen Wissens *Fachwissen* und *fachdidaktisches Wissen* werden in fast allen Modellen aufgegriffen, teils umbenannt und ausdifferenziert<sup>4</sup> – wie im Folgenden gezeigt werden soll. Des Weiteren haben auch das *diagnostische* und das *curriculare Wissen* eine besondere Rolle inne, da sie in den betrachteten Modellen bei unterschiedlichen Facetten immer wieder aufgegriffen werden.

#### 1.1.2.1 *Fachwissen*

Shulman (1986) unterscheidet in seiner fachunabhängig formulierten Klassifikation der Wissensdomänen zunächst zwischen *pädagogischem Wissen* und inhaltlichem Wissen (*content knowledge*). Um spezielles Fachwissen zu identifizieren, das für das Unterrichten notwendig ist, differenziert er das inhaltliche Wissen weiter aus: Unter Fachwissen (*subject matter content knowledge*) versteht Shulman (1986) dabei nicht nur begriffliches Wissen oder das Wissen zentraler Konzepte eines Faches, sondern auch das Verständnis der dahinterliegenden Strukturen des Inhaltsgebietes. Ziel ist nicht das alleinige Beherrschen des Inhalts, sondern auch das Verständnis einer Thematik und deren logischer Hintergründe, also warum etwas so ist. Während Shulman das Fachwissen (*subject matter content knowledge*), das *curriculare Wissen* und das fachdidaktische Wissen (*pedagogical content knowledge*) dem *content knowledge* unterordnet, stehen bei Bromme (1992, 1997) *fachliches Wissen* und *curriculares Wissen* auf einer Ebene mit beispielsweise pädagogischem Wissen (vgl. Abbildung 1, Spalte 3). Fachliches Wissen ist nach Bromme (1992, 1997) Wissen über die Fachdisziplin Mathematik, welches im jeweiligen Ausbildungsgang erworben wird.

Das fachlich-mathematische Wissen wird von der COACTIV-Gruppe in vier Stufen unterschieden, welche vier „Grade der stofflichen Durchdringung“ (Baumert & Kunter 2011, S. 37) darstellen:

- (1) *Mathematisches Alltagswissen von Erwachsenen, das auch nach Verlassen der Schule noch präsent ist,*
- (2) *Beherrschung des Schulstoffes auf einem zum Ende der Schulzeit unterrichteten Niveaus,*
- (3) *Profundes mathematisches Verständnis der in der Schule unterrichteten Sachverhalte,*
- (4) *Akademisches Forschungswissen.*

---

<sup>4</sup> Die Benennung dieser Facetten entspricht sich nicht in allen Modellen. Inhaltlich sind jedoch deutliche Zusammenhänge und Gemeinsamkeiten ersichtlich.

Referenz für das fachliche Wissen von Mathematiklehrkräften ist für die Autorinnen und Autoren der COACTIV-Studie ein tiefes mathematisches Verständnis des Hintergrundes der in der Schule unterrichteten Sachverhalte (Stufe 3). Das fachliche Wissen schließt also die souveräne Beherrschung des Schulstoffes (Stufe 2) mit ein.

Die Modellierung der Komponenten des fachlichen Wissens der Gruppe um Loewenberg Ball (Ball et al. 2005; Hill et al. 2004; Loewenberg Ball et al. 2008) unterscheidet sich an einigen Stellen von der der COACTIV-Gruppe. Wie auch bei Shulman werden zunächst Fachwissen (*subject matter knowledge*) und fachdidaktisches Wissen (*pedagogical content knowledge*) unterschieden. Das Fachwissen präzisiert die Gruppe um Ball spezifisch für das Wissen von Grundschullehrkräften im Fach Mathematik weiter und unterscheidet für diese Zielgruppe drei Formen des mathematischen Wissens (Hill et al. 2004; Ball et al. 2005; siehe auch Loewenberg Ball et al. 2008):

- (1) *Common knowledge of content (CKC)*
- (2) *Specialised knowledge of content (SKC)*
- (3) *Horizon content knowledge (HCK)*

Dabei versteht die Gruppe um Loewenberg Ball unter *common knowledge of content (CKC)* mathematisches Alltagswissen, welches nicht ausschließlich im Unterricht verwendet wird und über welches auch andere Berufsgruppen und Personen verfügen (können) (Loewenberg Ball et al. 2008, S. 399). Das *CKC* ähnelt der Stufe 1 der Modellierung mathematischen Wissens der COACTIV-Studie. Im Gegensatz dazu ist das *specialised knowledge of content (SKC)* mathematisches Spezialwissen, das sich aus speziellem professionellen Wissen und Berufserfahrung zusammensetzt und nur für das Lehren von Mathematik benötigt wird. Dieses Wissen beinhaltet u. a. das Erkennen von Mustern in Schülerfehlern, das Verändern von Aufgaben in ihrem Schwierigkeitsgrad, das Auswählen geeigneter Repräsentationen zu bestimmten Zwecken oder auch das Verwenden mathematischer Sprache und einer entsprechenden Notation. Das *SKC* ist inhaltlich dem fachdidaktischen Wissen sowie auch dem diagnostischen Wissen ähnlich (vgl. Abschnitt 1.1.2.4). Das *horizon content knowledge* beschreibt das Bewusstsein der Lehrerinnen und Lehrer darüber, wie einzelne mathematische Themen in das Schulcurriculum – auch über die aktuelle Jahrgangsstufe hinaus – eingegliedert sind. Das *horizon content knowledge* weist daher inhaltliche Parallelen mit dem curricularen Wissen (vgl. Abschnitt 1.1.2.3) auf.

### 1.1.2.2 Fachdidaktisches Wissen

Fachdidaktisches Wissen ist nach Shulman (1986, S.9) „Fachwissen für das Unterrichten“. Shulman ordnet das fachdidaktische Wissen (*pedagogical content knowledge*) dem *content knowledge* zu und versteht darunter:

- (a) *Wissen um unterschiedliche Repräsentationsformen, die Schülerinnen und Schülern das Fach verständlich machen.*
- (b) *Wissen um Faktoren, die das Lernen spezifischer Inhaltsbereiche erschweren bzw. erleichtern.*
- (c) *Wissen über Strategien, die Lernende im Verständnisprozess unterstützen können.*

Dieser Wissensdomäne Shulmans inhaltlich ähnlich ist das SKC (vgl. bspw. Auswählen geeigneter Repräsentationen), welches die Gruppe um Loewenberg Ball dem mathematischen Wissen zuordnet. Auch das fachspezifisch-pädagogische Wissen aus der Topologie des professionellen Wissens von Bromme (1992; 1997) ähnelt dieser Wissensdomäne Shulmans inhaltlich. Bromme versteht darunter Wissen, bei dem psychologisch-pädagogische Kenntnisse, Erfahrungen der Lehrkraft und curriculares Wissen als Zugang zur Vermittlung der fachlichen Inhalte zusammenspielen. Ein Unterschied zu Shulman (1986) findet sich bei Bromme in der klaren Trennung zwischen *curricularem Wissen* und *fachspezifisch pädagogischem Wissen*.

Die Autorinnen und Autoren der COACTIV-Studie modellieren und operationalisieren fachdidaktisches Wissen in drei Kategorien (Baumert & Kunter 2011, S. 37f.):

- (a) *Wissen über das didaktische und diagnostische Potenzial, die kognitiven Anforderungen und impliziten Wissensvoraussetzungen von Aufgaben, ihre didaktische Sequenzierung und die langfristige curriculare Anordnung von Stoffen,*
- (b) *Wissen über Schülervorstellungen (Fehlkonzeptionen, typische Fehler, Strategien) und Diagnostik von Schülerwissen und Verständnisprozessen*
- (c) *Wissen über multiple Repräsentations- und Erklärungsmöglichkeiten.*

In der Modellierung des fachdidaktischen Wissens der COACTIV-Studie zeigen sich Parallelen zur Modellierung fachdidaktischen Wissens anderer Modelle. Die unter (c) gefasste Kategorie ist auch bei Shulman sowie im SKC der Michigan-Gruppe eingebettet. Weitere Parallelen zum SKC der Michigan-Gruppe sind auch bei (b) auszumachen, insbesondere im Erkennen von Mustern in den Fehlern der Schülerinnen und Schüler. Nach Baumert und Kunter (2011) ist fachdidaktisches Wissen (welches fachliches Wissen voraussetzt) vor allem durch den klaren Bezug dieses Wissens zum Unterricht und zu den Schülern geprägt und daher vom rein fachlichen Wissen theoretisch abzugrenzen. Der klare Bezug des fachdidaktischen Wissens

zum Unterricht wird im Modell von Baumert und Kunter insbesondere dadurch deutlich, dass dem fachdidaktischen Wissen eine deutliche Orientierung an den Schülerinnen und Schülern und deren Wissen zugeschrieben wird (vgl. Baumert & Kunter 2011, S. 37f., (a) und (b)). Die fachdidaktische Facette weist dadurch auch klare diagnostische Bezüge auf. Diese diagnostische Komponente wird in dieser Arbeit gesondert unter dem Punkt diagnostisches Wissen aufgegriffen (vgl. Abschnitte 1.1.2.4 und 1.2.4).

Auch die Modellierung des fachdidaktischen Wissens der Michigan-Gruppe um Loewenberg Ball unterscheidet sich von der der COACTIV-Gruppe. Fachdidaktisches Wissen modelliert die Michigan-Gruppe theoretisch in mehreren Komponenten: *Knowledge of content and students (KCS)*, *knowledge of content and teaching (KCT)* und *knowledge of content and curriculum*<sup>5</sup> (Loewenberg Ball et al. 2008). *Knowledge of content and students* ist Wissen, das mathematische Inhalte mit Schülervorstellungen verbindet. In Situationen, in denen dieses Wissen benötigt wird, spielt insbesondere das In-Beziehung-Setzen von spezifischem, mathematischem Wissen mit dem mathematischen Denken der Lernenden eine Rolle (bspw. Fehlvorstellungen, typische Fehler, typische Schwierigkeiten oder Schülerstrategien). So wird das *knowledge of content and students* beispielsweise bei der Auswahl angemessener Aufgaben benötigt, die dem Lernstand der Schülerinnen und Schüler entsprechen (Loewenberg Ball et al. 2008). Bezugnehmend zur COACTIV-Studie, ist die dort unter (a) gefasste Kategorie fachdidaktischen Wissens im *knowledge of content and students* nach Loewenberg Ball et al. wiederzufinden. *Knowledge of content and teaching* umfasst die Kombination aus dem Wissen über mathematische Inhalte und deren Vermittlung. Dieses Wissen kommt beispielsweise zum Tragen bei einer angemessenen Sequenzierung der Unterrichtsinhalte oder bei einer Passung der Aufgabenwahl zu entsprechenden Zeitpunkten in der Unterrichtssequenz und auch der Auswahl angemessener Methoden – ähnlich wie auch die unter (c) beschriebene Kategorie der COACTIV-Studie.

### 1.1.2.3 Curriculares Wissen

Eng verknüpft mit dem fachdidaktischen Wissen von Lehrkräften ist das *curriculare Wissen*. Bereits Shulman (1986) zählt das *curricular knowledge* neben dem *subject matter content knowledge (Fachwissen)* und dem *pedagogical content knowledge (fachdidaktisches Wissen)* zum con-

---

<sup>5</sup> Diese Komponente wird in der hier vorliegenden Arbeit der Facette des curricularen Wissens zugeordnet und an entsprechender Stelle (vgl. Abschnitt 1.1.2.3) erneut aufgegriffen.

*tent knowledge*. Shulman (1986) beschreibt diese Wissensdomäne als das Wissen um vorhandene Programme und damit verbunden auch um das Vorhandensein von „instruction material“ (für jeden Inhaltsbereich) und dessen adäquaten Einsatz (Shulman 1986, S. 10). Ähnlich wie auch Shulman zählen Loewenberg Ball et al. (2008) das *knowledge of content and curriculum* zu den Domänen mathematischen Wissens und verstehen darunter Wissen über die Abfolge des Unterrichtsstoffes bzw. der -inhalte sowie das Wissen um curriculare Vorgaben. Die Autorinnen und Autoren fassen dieses Wissen jedoch zum fachdidaktischen Wissen – wie auch die beiden Wissensbereiche *KCS* und *KCT*. Somit greift die Michigan-Gruppe zwar inhaltlich auf Shulman zurück, ordnet diese Domäne jedoch dem fachdidaktischen Wissen zu – eine klare Zuordnung ist bei Shulman nicht zu finden, denn für ihn ist das curriculare Wissen eine eigene Domäne des professionellen Wissens (vgl. Shulman 1987).

Eine weitere enge Verknüpfung des curricularen Wissens zeigt sich bei der Michigan-Gruppe mit der Facette des *horizon content knowledge*, welches die Gruppe dem fachlichen Wissen zuordnet (vgl. Abschnitt 1.1.2.1). Damit erfährt diese Facette inhaltlich eine andere Bedeutung, denn sie beschreibt nicht nur das Wissen um vorgegebene Lehrgänge, sondern rückt den Zusammenhang schulmathematischer Inhalte einzelner Schulstufen in den Vordergrund. *Horizon content knowledge* umfasst somit nicht nur das Wissen in einem Inhaltsbereich einer Jahrgangsstufe, sondern auch die Kenntnis davon, welches Wissen sich in späteren Jahrgangsstufen daran anschließt. Dies ist insbesondere wichtig, um in frühen Jahren die Anschlussfähigkeit des Wissens von Beginn an im Blick zu haben und mathematische Grundlagen zu legen, welche die Basis für späteres Mathematiklernen stellen (vgl. Unterkapitel 2.1).

Unter curricularem Wissen versteht Bromme (1997) – anders als Shulman und ähnlich dem *horizon content knowledge* nach Loewenberg Ball et al. – Wissen, welches das Schulfach Mathematik nicht nur als eine „Vereinfachung[] fachmathematischer Zusammenhänge“ (Bromme 1997, S. 196) darstellt, sondern als einen eigenen Wissensbereich. Dieser Wissensbereich zeichnet sich somit dadurch aus, dass auch pädagogische Zielvorstellungen über Bildung in die zu vermittelnden Inhalte der wissenschaftlichen Fachdisziplin Mathematik einfließen (vgl. Bromme 2008). Somit sieht Bromme hier eine klarere Trennung zwischen universitärem, in der Ausbildung erworbenem Wissen (*fachliches Wissen*, z. B. über die Mathematik als Wissenschaftsdisziplin) und dem schulnahen Wissen<sup>6</sup> als Shulman (1986).

---

<sup>6</sup> Bromme (1995) nimmt kritisch Stellung bezüglich Shulmans Aussagen, insbesondere zum *pedagogical content knowledge*. Der Autor äußert sich kritisch zur teils unklaren/ nicht ausreichend klaren Unterscheidung zwischen

#### 1.1.2.4 Diagnostisches Wissen

Neben den beiden zentralen inhaltsbezogenen Domänen professionellen Wissens von Lehrkräften (*Fachwissen* und *fachdidaktisches Wissen*) sowie dem *curricularen Wissen*, stellt auch das *diagnostische Wissen* eine zentrale Facette des professionellen Wissens von Lehrerinnen und Lehrern dar. Ähnlich dem *curricularen Wissen*, variiert auch die Verortung des diagnostischen Wissens innerhalb der Modelle (vgl. Abbildung 1) stark. Nichtsdestotrotz ist das diagnostische Wissen in vielen Modellen enthalten und von hohem Stellenwert in der Tätigkeit von Lehrerinnen und Lehrern (Weinert et al. 1990; Weinert 2001; Baumert & Kunter 2006; vgl. auch DMV, GDM & MNU 2008).

Im Konzept der Unterrichtsexpertise nach Weinert et al. (1990) (siehe auch Weinert 2001) erfährt das *diagnostische Wissen* durch die Anordnung auf einer Ebene mit anderen Domänen der Unterrichtsexpertise (u. a. *Sachwissen*) eine zentrale Rolle. Die Autoren beschreiben, dass es sich hierbei um Wissen handelt, welches die Lehrkraft über ihre Schülerinnen und Schüler hat. Es handelt sich zum einen um allgemeines Wissen über eine bestimmte Altersklasse und damit verbunden, deren Leistungsfähigkeiten und Schwierigkeiten. Zum anderen wird auch Wissen über Besonderheiten und Stärken sowie Schwächen einzelner Schülerinnen und Schüler sowie Klassen darunter verstanden (Schrader et al. 1990, S. 191). Schrader et al. (1990) fassen das diagnostische Wissen also sehr weit, wodurch sich eine Verknüpfung mit nicht fachspezifischem pädagogisch-psychologischen Wissen zeigt. In anderen Modellen tritt das diagnostische Wissen nicht als eigenständiger Wissensbereich wie bei Weinert et al. (1990), sondern implizit als wissensfacetten-übergreifendes Konstrukt auf.

Shulman (1986; 1987) arbeitet neben seiner Klassifikation der Wissensdomänen kognitive Grundlagen unterrichtlichen Handelns (*aspects of pedagogical reasoning and action*) heraus. Diese Grundlagen, die das Handeln von Lehrkräften leiten und immer wieder in der gleichen Abfolge im Unterricht wiederkehren, umfassen u. a. auch die *Evaluation* unterrichtlichen Agierens (vgl. Tabelle 1). Shulman (1987) betont, dass die beschriebenen Prozesse der Evaluation fachdidaktisches Wissen der konkreten Inhaltsbereiche voraussetzen: Lehrerinnen und Lehrer müssen Wissen über Lernprozesse haben, um die *Evaluation* durchführen zu können

---

verschiedenen Aspekten, wie bspw. der Trennung „fachdidaktische[r] und allgemeindidaktische[r] Konzepte[] einerseits und deren subjektiven Repräsentationen andererseits“. Diese Unterscheidung sei bei Shulman ebenso wenig auffindbar wie zum Beispiel jene zwischen der Mathematik als wissenschaftlicher Disziplin, als Schulfach sowie als Fachdidaktik (Bromme 1995, S. 107).

(Shulman 1987, S.19). Prozesse der *Evaluation* sind also Situationen, die *diagnostisches Wissen* erfordern.

Tabelle 1: *Evaluation im "Model of Pedagogical Reasoning and Action" aus Shulman (1987, S. 15)*

**Evaluation**

- (a) Checking for student understanding during interactive teaching
- (b) Testing student understanding at the end of lessons or units
- (c) Evaluating one's own performance, and adjusting for experiences<sup>7</sup>

Ähnlich messen auch Baumert und Kunter (2006) diagnostischem Wissen von Lehrerinnen und Lehrern eine große Bedeutung zu. Unter dem Begriff der diagnostischen Kompetenz ordnen sie das diagnostische Wissen jedoch in das Gesamtgefüge des pädagogischen Wissens und Könnens von Lehrkräften ein. Baumert und Kunter (2006) betonen dabei den engen Zusammenhang von Diagnoseverhalten mit der Unterrichtsgestaltung: Das Diagnoseverhalten hat eine

*„große Bedeutung für eine kognitiv herausfordernde, gleichwohl aber das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler berücksichtigende und konstruktiv-unterstützend wirkende Unterrichtsgestaltung [...], nämlich die Bereitschaft und Fähigkeit, das Verständnis von Schülerinnen und Schülern gezielt im Lernprozess selbst und nicht erst in Klassenarbeiten oder Tests zu überprüfen.“ (Baumert & Kunter 2006, S. 489).*

Um diagnostische Leistungen in diesem Sinne als Lehrkraft erbringen zu können, spielt nicht nur Wissen, sondern auch die Beobachtung der einzelnen Schülerinnen und Schüler sowie die sich daran anschließende pädagogisch-didaktische Handlung eine Rolle (vgl. auch Gasteiger & Benz 2016).

Das diagnostische Wissen von Lehrerinnen und Lehrern steht also immer auch in einem sehr engen Zusammenhang mit deren fachdidaktischem und pädagogisch-psychologischem Wissen, da es sowohl bei der Beobachtung der Schülerinnen und Schüler als auch bei pädagogisch-didaktischem Handeln benötigt wird (vgl. Abschnitt 1.2.4). Die starke Anbindung des diagnostischen Wissens an die Facette des fachdidaktischen Wissens wird im Modell der COACTIV-Studie explizit: Die *Diagnostik von Schülerwissen und Verständnisprozessen* wird mit zu der Facette *Wissen über das mathematische Denken von Schülerinnen und Schülern* unter

---

<sup>7</sup> Gemeint ist hier, dass die Lehrkraft ihre eigene Leistung/ ihren Unterricht reflektiert und dann auf Basis dieser Erfahrungen anpasst.

fachdidaktischem Wissen gefasst (Baumert & Kunter 2011, siehe Abbildung 1). Shulman (1987) hingegen ergänzt *content knowledge* mit einer eigenen Facette des *knowledge of learners and their characteristics*, wodurch an dieser Stelle die Bedeutung unterrichtsbezogener Diagnoseleistungen für eine angemessene Unterrichtsgestaltung deutlich wird. Darüber hinaus zeigt sich, dass sich Diagnoseleistungen vor allem in einer Anpassung des Unterrichts an die fachspezifischen Lernvoraussetzungen der Schülerinnen und Schüler ausdrücken. Eine angemessene Anpassung des Unterrichts an die Lernvoraussetzungen der Schülerinnen und Schüler sowie die Überwachung des Lernfortschritts und der Abklärung der Lernvoraussetzungen sind grundlegend für den Lern- und Unterrichtserfolg (Schrader 2013). Diese Anpassungsprozesse stellen somit eine hohe Anforderung an das fachdidaktische Wissen der Lehrkräfte dar, da sie z. B. bei der Auswahl von Aufgaben oder beim Geben von Arbeitsaufträgen eine besondere Rolle spielen (Baumert & Kunter 2006) (vgl. Kapitel 2.4).

Abschließend lässt sich konstatieren, dass das diagnostische Wissen in einem engen Zusammenhang mit weiteren Facetten des professionellen Wissens von Lehrkräften steht und sowohl allgemein-pädagogisch als auch fachspezifisch von Bedeutung für die Unterrichtsgestaltung ist (vgl. auch Bromme 1997, S. 200). Somit lässt sich festhalten, dass das Ziel diagnostischer Leistungen im schulischen Kontext darin besteht, „Informationen über Lernergebnisse, Lernvoraussetzungen und Lernvorgänge von Schülerinnen und Schülern zu gewinnen, die für verschiedene pädagogische Entscheidungen [...] genutzt werden können“ (Schrader 2013, S. 154).

Die von Shulman (1986) herausgearbeiteten Wissenskomponenten des professionellen Wissens von Lehrerinnen und Lehrern *allgemeines pädagogisches Wissen, Fachwissen und fachdidaktisches Wissen* werden in verschiedenen Modellen und theoretischen Auseinandersetzungen aufgegriffen (siehe u. a. Bromme 1992; Weinert et al. 1990; Weinert 2001; Baumert & Kunter 2006, 2011; Blömeke et al. 2010; siehe Abbildung 1). Aus all diesen Modellen und theoretischen Auseinandersetzungen geht hervor, dass die Wissensdimensionen *fachdidaktisches Wissen* und *Fachwissen* eine zentrale Stellung für das erfolgreiche Unterrichten fachspezifischer mathematischer Inhalte innerhalb des Wissenskanons von Lehrkräften innehaben. Zudem wird dem *diagnostischen Wissen* als Teil des professionellen Wissens von Lehrkräften eine große Bedeutung zugemessen (Weinert et al. 1990; Bromme 1997; Baumert & Kunter 2006). Eine weitere Facette, die in den Arbeiten zum fachspezifischen Lehrerprofessionswis-

sen immer wieder auftaucht, ist das *curriculare Wissen* (Shulman 1986; Bromme 1997; Loewenberg Ball et al. 2008). Sowohl das diagnostische Wissen als auch das curriculare Wissen sind nicht unbedingt immer rein fachspezifisch zu verstehen. Geht es jedoch darum, Wissen in einem fachspezifischen Kontext zu vermitteln, so scheint es notwendig, diese allgemeinen Aspekte fachspezifisch zu interpretieren und anzuwenden.

## 1.2 Begriffsklärung und Positionierung für die vorliegende Arbeit

Die in Unterkapitel 1.1 beschriebenen inhaltspezifischen Facetten des Wissens von Lehrerinnen und Lehrern sind nicht immer klar voneinander zu trennen und inhaltlich in den verschiedenen Kompetenzmodellen unterschiedlich verortet. Aus diesem Grund wird im Folgenden dargelegt, wie die Facetten *fachliches Wissen*, *fachdidaktisches Wissen*, *curriculares Wissen* und *diagnostisches Wissen* für diese Arbeit verstanden werden.

### 1.2.1 Curriculares Wissen

Diese Wissensfacette findet insbesondere in der feingliedrigen Modellierung des mathematikdidaktischen Wissens der Michigan-Gruppe Erwähnung. Orientiert an den beiden Wissensfacetten *horizon content knowledge* und *knowledge of content and curriculum* nach Ball et al. (vgl. u. a. Ball et al. 2005; Hill et al. 2004) stehen zwei inhaltliche Schwerpunkte des curricularen Wissens für diese Arbeit im Vordergrund: Unter curriculumem Wissen wird zum einen das Wissen über mathematische Inhalte des Schulcurriculums und deren entsprechende Eingliederung in das Schulcurriculum verstanden und zum anderen das Wissen um den Aufbau jedes einzelnen Inhaltsbereiches. Dieses Wissen wird speziell im Hinblick auf die Anschlussfähigkeit für den Inhaltsbereich Symmetrie und Achsenspiegelung des in den jeweiligen Jahrgangsstufen unterrichteten Stoffes benötigt. Gleichzeitig gibt dieses Wissen vor, welche inhaltlichen Ziele zu bestimmten Zeitpunkten erreicht werden sollen.

### 1.2.2 Fachwissen

Das Fachwissen stellt neben dem fachdidaktischen Wissen eine der Kernkomponenten des professionellen Wissens von Lehrerinnen und Lehrern dar (Baumert & Kunter 2006). Um Wissen für den Inhaltsbereich Symmetrie und Achsenspiegelung in der Grundschule herausarbeiten zu können, wird unter Fachwissen für diese Arbeit orientiert an der COACTIV-Studie das profunde mathematische Verständnis der in der Schule unterrichteten Sachverhalte (Baumert & Kunter 2011) und die Beherrschung des Schulstoffes auf einem zum Ende der Schulzeit

unterrichteten Niveau (Baumert & Kunter 2011) verstanden. Dabei wird davon ausgegangen, dass auch mathematisches Alltagswissen, wie es in den Modellen der Michigan-Gruppe und der COACTIV-Studie beschrieben wird, mitbeinhaltet ist, da allgemein-grundlegendes mathematisches Wissen als Grundlage des Wissens um den Schulstoff bei Lehrerinnen und Lehrern gesehen werden kann.

### 1.2.3 Fachdidaktisches Wissen

Neben dem Fachwissen stellt das fachdidaktische Wissen die zweite Kernkomponente des professionellen Wissens von Lehrerinnen und Lehrern dar (Baumert & Kunter 2006). Um auch dieses Wissen für den Inhaltsbereich Symmetrie und Achsenspiegelung spezifizieren zu können, orientiert sich die hier vorliegende Arbeit an der Michigan-Gruppe und der COACTIV-Gruppe. Folgende Punkte werden daher als zentral für die vorliegende Arbeit gesehen: Die Sequenzierung der Unterrichtsinhalte sowie eine adäquate Aufgabenauswahl (vgl. Loewenberg Ball et al. 2008, *KCT*), das Wissen um Aufgaben und deren Schwierigkeiten (vgl. Baumert & Kunter 2011; Loewenberg Ball et al. 2008, *KCT*), das Wissen um Fehlvorstellungen<sup>8</sup> und typische Fehler der Schülerinnen und Schüler (vgl. Loewenberg Ball et al. 2008, *KCS*) und das Wissen um Strategien (vgl. Baumert & Kunter 2011; Loewenberg Ball et al. 2008, *KSC*).

### 1.2.4 Diagnostisches Wissen

Verschiedene Modelle betonen die Bedeutung des diagnostischen Wissens für das unterrichtliche Handeln von Lehrerinnen und Lehrern<sup>9</sup>. Die obigen Ausführungen zeigen, dass das diagnostische Wissen sowohl einen allgemeinen fachübergreifenden Bezug aufweist, gleichzeitig jedoch auch inhaltlich angebunden ist. Im Rahmen dieser Arbeit wird diagnostisches Wissen v.a. als Wissen gesehen, welches Lehrerinnen und Lehrer als Grundlage für angemessene Diagnoseleistungen im Sinne einer handlungsleitenden Diagnostik (vgl. Wollring 2006) benötigen. Wollring (2006, S.65) versteht darunter eine „Diagnostik, an deren Durchführung [...]

---

<sup>8</sup> Das Wissen um Fehlvorstellungen steht in engem Zusammenhang mit diagnostischen Leistungen von Lehrerinnen und Lehrern. Jedoch wird das Wissen um Fehlvorstellungen an dieser Stelle unter fachdidaktischem Wissen gefasst, da es zunächst auch um die mathematische und mathematikdidaktische Anbindung und das Verständnis dieser Fehlvorstellungen geht, bevor diese zu diagnostischen Zwecken genutzt werden können.

<sup>9</sup> In der hier vorliegenden Arbeit wird insbesondere auf die pädagogisch-didaktische Bedeutung des diagnostischen Wissens Wert gelegt und weniger auf empirisch basierte Diagnostik im Sinne psychometrischer Testverfahren.

Lehrerinnen und Lehrer unmittelbar beteiligt sind und aus der sie Unterstützung für ihren eigenen Unterricht gewinnen können“.

Diagnostische Leistungen von Lehrerinnen und Lehrern im Unterricht umfassen sowohl informelle Diagnosen als auch explizite Formen der formellen Diagnostik (Schrader 2013). Informelle oder auch implizite Diagnosen (vgl. Helmke 2017) finden fortlaufend im Unterricht zur Einschätzung der im Wandel befindlichen Lernvoraussetzungen der Schülerinnen und Schüler statt. Explizite oder formelle Formen diagnostischer Leistungen dienen der Informationsgewinnung auf Basis wissenschaftlich fundierter Methoden, wie bspw. durch (standardisierte) Tests. Um als Lehrperson lern- und unterrichtsbezogene diagnostische Entscheidungen treffen zu können, gilt es, Wissen aus verschiedenen Wissensfacetten – fachspezifische, inhaltsbezogene und fachübergreifende, pädagogisch-psychologische – zusammenzuführen und mit Blick auf erwünschte Soll-Zustände (z. B. bestimmte fachinhaltliche Lernziele) (vgl. Definition des Ziels diagnostischer Leistungen nach Schrader (2013, S. 154); Abbildung 2, grauer Kasten) zu interpretieren. Abbildung 2 veranschaulicht das Zusammenspiel verschiedener Facetten professionellen Wissens mit dem Ziel, angemessene diagnostische Leistungen zu erbringen.

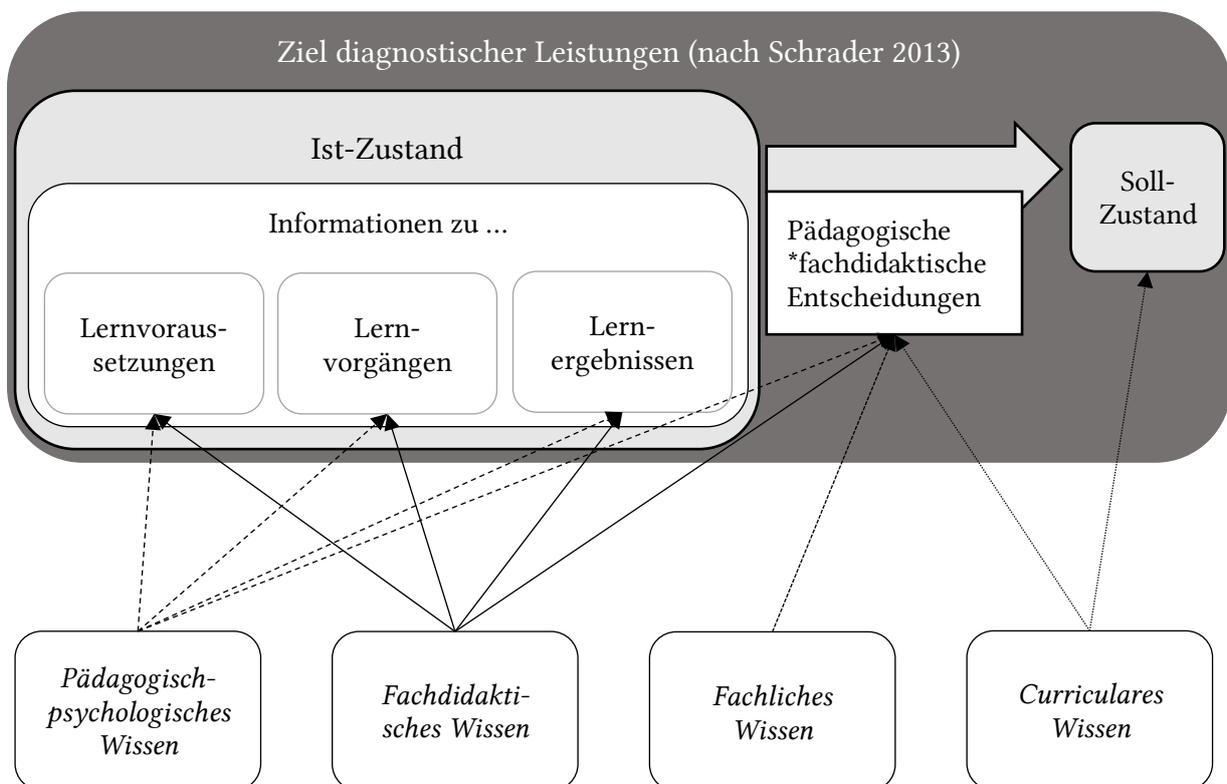


Abbildung 2: Zusammenspiel der Facetten professioneller Kompetenz mit dem Ziel diagnostischer Leistungen; die Kennzeichnung mit dem \* stellt eine durch die Autorin vorgenommene Veränderung der ursprünglichen Definition nach Schrader (2013) dar.

Fachspezifische und fachübergreifende Bezüge des diagnostischen Wissens ermöglichen es, Informationen über die Schülerinnen und Schüler zu gewinnen (vgl. Abschnitt 1.1.2.4) (Ist-Zustand) und diese für eine aus diagnostischer Sicht sinnvolle Unterrichtsgestaltung zu nutzen, um ein bestimmtes Unterrichtsziel zu erreichen (Soll-Zustand) (vgl. Abbildung 2). Dieser Soll-Zustand orientiert sich an curricularen Vorgaben (vgl. Abschnitt 1.2.1 und Unterkapitel 2.1). Dazu wird diagnostisches Wissen in dieser Arbeit stark verknüpft mit den Wissensfacetten *Fachwissen*, *fachdidaktisches Wissen* und *curriculares Wissen* betrachtet (vgl. Abschnitt 1.1.2.4).

Fachspezifische Bezüge des diagnostischen Wissens zeigen sich im Heranziehen *fachdidaktischen Wissens*, *fachlichen Wissens* und *curricularen Wissens* im Kontext diagnostischer Leistungen. Das *fachdidaktische Wissen* kann dabei als zentraler fachspezifischer Bezug handlungsleitender Diagnostik gesehen werden, da es sowohl bei der fachlichen Beurteilung der Lernvoraussetzungen, der Lernvorgänge und der Lernergebnisse der Schülerinnen und Schüler als wichtige Wissensquelle für Lehrerinnen und Lehrer dient sowie das Treffen pädagogischer Entscheidungen entscheidend beeinflusst (vgl. Abbildung 2). Schrader (2013) spricht an dieser Stelle nur von pädagogischen Entscheidungen, die im Unterrichtskontext getroffen werden. In einem fachspezifischen Kontext müssen diese Entscheidungen jedoch auch fachdidaktisch und diagnostisch sinnvoll sein, weshalb dies in der Grafik ergänzt wurde (vgl. Abbildung 2, Kennzeichnung mit \*). Das *fachliche Wissen* sowie das *curriculare Wissen* von Lehrerinnen und Lehrern spielen im Rahmen handlungsleitender Diagnostik primär bei *pädagogisch \*fachdidaktischen Entscheidungen* eine Rolle. Insbesondere, da erst beim Treffen diagnostischer Entscheidungen basierend auf fachlichem Wissen die Anschlussfähigkeit des vermittelten Stoffes an Bedeutung gewinnt. Curriculares Wissen bildet die Grundlage für die Einordnung der Distanz zwischen dem fachlichen Lernstand der Schülerinnen und Schüler und dem zu erreichenden fachlichen Lernziel (vgl. Abbildung 2).

## 2 Zentrale Wissensfacetten mit dem Fokus auf das Unterrichten von Symmetrie und Achsenspiegelung

Die bereits in Kapitel 1 und insbesondere in Unterkapitel 1.2 für die vorliegende Arbeit präzisierten relevanten inhaltsbezogenen Wissensfacetten werden in diesem Kapitel als Ausgangspunkt genommen, fachspezifisch konkretisiert und für die Inhaltsbereiche Symmetrie und Achsenspiegelung detailliert beschrieben. Diese Konkretisierung dient dem Ziel der hier vorliegenden Arbeit, herauszuarbeiten, über welches Wissen Grundschullehrerinnen und -lehrer verfügen sollten, um im Inhaltsbereich Symmetrie und Achsenspiegelung erfolgreiche und anschlussfähige Lernprozesse anzuleiten.

### 2.1 Curriculares Wissen mit dem Fokus auf das Unterrichten von Symmetrie und Achsenspiegelung

Das Wissen um die mathematischen Inhalte des Schulcurriculums und um den unterrichtlichen Aufbau des Inhaltsbereiches stehen in einem engen Zusammenhang: Grundschullehrerinnen und -lehrer sollten zum einen die geometrischen Inhalte des Schulcurriculums der Grundschule kennen und dieses Wissen mit dem Wissen über geometrische Inhalte vorheriger und nachfolgender Schulstufen verknüpfen. Aus diesem Grund wird im Folgenden zum einen auf die curricularen Inhalte der Grundschule eingegangen. Zum anderen werden damit verbunden – chronologisch dem Schulverlauf folgend – vorherige (hier: Elementarbereich) und nachfolgende (hier: Sekundarstufe I) Anforderungen im Umgang mit Symmetrie und Achsenspiegelung geschildert, welche wichtiges Wissen für Lehrerinnen und Lehrer in der Grundschule darstellen.

#### 2.1.1 Geometrische Inhalte in der elementaren mathematischen Bildung

Für Kindertagesstätten in Deutschland gibt es bisher keine einheitlichen Vorgaben über ein mathematisches Curriculum (Hasemann & Gasteiger 2020). Handreichungen einzelner Länder (vgl. bspw. Orientierungsplan für Bildung und Erziehung in Niedersachsen (Niedersächsisches Kultusministerium 2018)) stellen überwiegend sprachliche Kompetenzen für die Arbeit in den Kindertagesstätten in den Vordergrund. Wenig präzise verbleibt die Kultusministerkonferenz (KMK 2004a) zu mathematischen Inhalten: Mathematische Vorläuferkenntnisse und -fähigkeiten sollen durch den „entwicklungsgemäßen Umgang mit Zahlen, Mengen und geometrischen Formen“ erworben werden (KMK 2004a). Spricht man dementsprechend von

Vorerfahrungen der Kinder im mathematischen Bereich der Geometrie zu Schuleintritt, so muss ein Bewusstsein bei Lehrerinnen und Lehrern dafür herrschen, dass Kinder mit sehr unterschiedlichen Vorkenntnissen zu Symmetrie und Achsenspiegelung in die Schule kommen, da dieser Inhalt nicht systematisch in den Kindertagesstätten aufgegriffen wird.

## 2.1.2 Kompetenzerwartungen an allgemeinbildenden Schulen

Für die allgemeinbildenden Schulen werden fachspezifische mathematische Inhalte in Deutschland zum einen durch die bundesweit gültigen Bildungsstandards (KMK 2004b; KMK 2005) für den jeweiligen Schulabschluss formuliert. Zum anderen legen länderspezifische Curricula bzw. Lehrpläne (bspw. Niedersächsisches Kultusministerium 2017<sup>10</sup>) Kompetenzen fest, die zu gewissen Zeitpunkten im Schulverlauf erreicht werden sollen. Die im Rahmen dieser Outputorientierung festgelegten Kompetenzen im geometrischen Inhaltsbereich der Symmetrie und Achsenspiegelung sind in der Leitidee *Raum und Form* verortet (KMK 2004b; KMK 2005; vgl. u. a. Niedersächsisches Kultusministerium 2017).

### 2.1.2.1 Kompetenzerwartungen zu Symmetrie und Achsenspiegelung am Ende der Jahrgangsstufe 2

Ausgehend von den Vorerfahrungen der Schülerinnen und Schüler findet die Erarbeitung geometrischer Begriffe in den ersten Jahrgängen der Grundschule stark handlungsgebunden statt (vgl. Abschnitt 2.3.1). Dies findet sich auch in den Kompetenzformulierungen für die Jahrgangsstufe 2 wieder: Die Schülerinnen und Schüler erkennen und beschreiben achsensymmetrische Figuren in ihrer Umwelt. Ebenso untersuchen sie Figuren auf Achsensymmetrie und erzeugen einfache achsensymmetrische Figuren (z. B. durch Spannen am Geobrett, Falten oder Klecksen) (u. a. Niedersächsisches Kultusministerium 2017).

### 2.1.2.2 Kompetenzerwartungen zu Symmetrie und Achsenspiegelung am Ende der Jahrgangsstufe 4

Kompetenzformulierungen für die Jahrgangsstufe 4 bauen auf den Kompetenzerwartungen der Jahrgangsstufe 2 auf. Die Kompetenzerwartungen der Jahrgangsstufe 4 beziehen sich nun mehr auf die Eigenschaften von symmetrischen Figuren und von Achsenspiegelungen: Die Schülerinnen und Schüler untersuchen Figuren auf Achsensymmetrie, beschreiben Merkmale

---

<sup>10</sup> Da diese Dissertation an der Universität Osnabrück in Niedersachsen entstanden ist und die Erhebungen überwiegend in Niedersachsen stattgefunden haben, wird das Niedersächsische Schulcurriculum exemplarisch herangezogen, um Kompetenzerwartungen an die Schülerinnen und Schüler zu beschreiben.

achsensymmetrischer Figuren und bestimmen die Anzahl von Symmetrieachsen. Ebenso stellen sie achsensymmetrische Figuren her, zeichnen Symmetrieachsen ein und überprüfen diese (bspw. KMK 2005). Grundlegende Kompetenzen bezüglich der Achsenspiegelung am Ende der Jahrgangsstufe 4 sind das Beschreiben der Eigenschaften der Achsenspiegelung, der Beziehung zwischen einer Figur und deren Spiegelbild sowie das Erzeugen von Figuren und deren Spiegelbildern (z. B. durch Zeichnen oder mithilfe eines Spiegels). Dabei beschreiben die Schülerinnen und Schüler ihre Vorgehensweise (bspw. Niedersächsisches Kultusministerium 2017; KMK 2005).

### *2.1.2.3 Kompetenzerwartungen zu Symmetrie und Achsenspiegelung in der Sekundarstufe I*

Für Grundschullehrkräfte ist ergänzend das Wissen um geometrische Inhalte von Bedeutung, die sich an die Grundschule anschließen, um notwendige Grundlagen für die Sekundarstufe bereits in der Grundschule anzubahnen und somit einen Blick für die Kontinuität der Inhalte zu sichern (Franke & Reinhold 2016). In den ersten Klassen der Sekundarstufe<sup>11</sup> werden Kenntnisse aus der Grundschule wieder aufgegriffen und insbesondere die Eigenschaften von Achsenspiegelungen weiter thematisiert sowie die Achsenspiegelung in den Gesamtkontext der Kongruenzabbildungen gestellt. Die Schülerinnen und Schüler identifizieren die Achsenspiegelung als Kongruenzabbildung und beschreiben sowie begründen Eigenschaften der Achsenspiegelung (Niedersächsisches Kultusministerium 2020). Neben der Achsenspiegelung lernen die Schülerinnen und Schüler weitere Kongruenzabbildungen (z. B. Punktspiegelung, Parallelverschiebung und Drehung) kennen und beschreiben deren Eigenschaften. Gleichermaßen erkennen, beschreiben und begründen sie die Eigenschaften ebener Figuren (Drehsymmetrie, Punktsymmetrie, Kongruenz, ...) und die Beziehungen dieser Eigenschaften zueinander (vgl. u. a. Niedersächsisches Kultusministerium 2020). Die Schülerinnen und Schüler nutzen die Eigenschaften der Kongruenzabbildungen (wie Achsensymmetrie, Drehsymmetrie, Punktsymmetrie, Kongruenz, ...), um geometrische Problemstellungen zu lösen. Das im Laufe der Sekundarstufe erworbene Wissen der Schülerinnen und Schüler zu Eigenschaften von Figuren und Eigenschaften von Kongruenzabbildungen findet auch im Zeichnen und Konstruieren geometrischer Figuren unter Verwendung angemessener Hilfsmittel wie Zirkel, Lineal, Geodreieck oder dynamischer Geometriesoftware Anwendung (u. a. KMK 2004b).

---

<sup>11</sup> Exemplarisch wird in diesem Abschnitt Bezug auf die Realschule genommen, wenn von der Sekundarstufe gesprochen wird, da davon ausgegangen werden kann, dass es sich hier um mittlere Anforderungen im Inhaltsbereich Symmetrie und Achsenspiegelung handelt.

Das Wissen um curriculare Vorgaben ist für Grundschullehrkräfte sicherlich handlungsleitend, um Grobziele im Unterricht zu setzen und um ein Bewusstsein für die Anschlussfähigkeit des Wissens insbesondere in Blickrichtung Sekundarstufe zu erwerben. Für die konkrete Unterrichtsgestaltung und unterrichtliches Handeln im Inhaltsbereich Symmetrie und Achsenspiegelung in der Grundschule sind curriculare Vorgaben jedoch nicht ausreichend. Mit den in den curricularen Inhalten sichtbar werdenden, steigenden Anforderungen bezüglich der Symmetrie und Achsenspiegelung über die Schulstufen hinweg wird auch die Bedeutung des fachlich-geometrischen Wissens und des geometriedidaktischen Wissens deutlich, über das Lehrerinnen und Lehrer verfügen sollten.

## 2.2 Fachwissen mit dem Fokus auf das Unterrichten von Symmetrie und Achsenspiegelung

Fachliches Wissen der Lehrkräfte ist bereits für das Unterrichten in den ersten Klassen der Grundschule essentiell. In den Jahrgangsstufen 1 und 2 erfolgt der Zugang handlungsorientiert über das Klappen und Falten. Eine klare Verwendung der Begrifflichkeiten „symmetrisch“ und „deckungsgleich“ ist auch hier schon grundlegend, um anschlussfähiges Wissen aufzubauen. Insbesondere eine korrekte sprachliche Verwendung der Begrifflichkeiten auf Seiten der Lehrerinnen und Lehrer, welche die Symmetrie (hier Achsensymmetrie) als Eigenschaft von Figuren und die Achsenspiegelung als Kongruenzabbildung voneinander abgrenzt, ist notwendig, um Fehlvorstellungen zu vermeiden. Die korrekte Verwendung fachlicher Begriffe (vgl. Kapitel 2) setzt ein mindestens profundes mathematisches Verständnis der zu unterrichtenden Sachverhalte voraus, ebenso wie die Beherrschung des Schulstoffes auf einem zum Ende der Schulzeit unterrichteten Niveau (vgl. Baumert & Kunter 2011). Wissen, über das Grundschullehrerinnen und -lehrer verfügen sollten, beinhaltet somit zum einen ein Verständnis der Begrifflichkeiten, Definitionen und der Zusammenhänge zwischen den Begriffen Symmetrie und Achsenspiegelung. Zum anderen ist das Wissen um die Einbettung der Symmetrie und Achsenspiegelung in den Gesamtkontext der Kongruenzabbildungen Teil des professionellen Wissens, welches Lehrerinnen und Lehrer benötigen, um die Anschlussfähigkeit des in der Grundschule erworbenen Wissens an die in der Sekundarstufe unterrichteten Inhalte zu gewährleisten (vgl. auch *horizon content knowledge*, Abschnitt 1.1.2.3).

### 2.2.1 Begriffsdefinition Symmetrie

Nach Weyl (1980) liegen dem Symmetriebegriff in der Umgangssprache zwei Bedeutungen zugrunde. Zum einen kann darunter etwas Wohlproportioniertes, Ausgeglichenes oder die Bezeichnung für die Konkordanz mehrerer Teile, durch welche diese sich zu einem Ganzen zusammenschließen, verstanden werden (Weyl 1980, S.11). Zum anderen kann Symmetrie im mathematischen Sinn definiert werden. Eine erste unterrichtliche Annäherung an den Symmetriebegriff kann über die Wohlproportioniertheit nach Weyl (1980) erfolgen. Schülerinnen und Schüler haben bereits zu Schuleintritt vielfältige – wenn auch unbewusste – Erfahrungen mit der Achsensymmetrie in ihrer Umwelt gesammelt (bspw. die Symmetrie von Formen oder Mustern) (vgl. Abschnitt 2.1.1). Bei der Thematisierung der Achsensymmetrie im Unterricht kann auf diese intuitiven Erfahrungen zurückgegriffen werden und es ist möglich daran anzuknüpfen, um den mathematischen Begriff anzubahnen (vgl. Abschnitt 2.3.1). Im mathematischen Sinn wird Symmetrie wie folgt definiert:

*„Eine Figur  $F$  heißt symmetrisch, wenn sie durch eine von der identischen Abbildung verschiedene Kongruenzabbildung auf sich selbst abgebildet wird“ (Benölken, Gorski & Müller-Philipp 2018, S. 190; vgl. auch Weyl 1980).*

Symmetrische Figuren können durch Kongruenzabbildungen erzeugt werden. Kongruenzabbildungen zählen neben u. a. der zentrischen Streckung oder algebraisch definierten Abbildungen zu den im Unterricht thematisierten Abbildungen.

### 2.2.2 Kongruenzabbildungen der Ebene

In der Ebene gibt es vier Typen von Kongruenzabbildungen: Achsenspiegelung (Geradenspiegelung), Drehung (Rotation), Verschiebung (Translation) und die Schubspiegelung (Gleitspiegelung). Um die Bedeutung der Achsenspiegelung im Kontext der Kongruenzabbildungen zu begreifen, ist das Wissen um Kongruenzabbildungen im Allgemeinen grundlegend. Eine Abbildung  $\alpha$  der Ebene ist eine Zuordnung, die jedem Punkt der Ebene ( $P$ ) einen entsprechenden Bildpunkt ( $P'$ ) eindeutig zuordnet. Dies wird wie folgt dargestellt:

$$P \xrightarrow{\alpha} P' = \alpha(P)$$

Eine Abbildung der Ebene auf sich heißt Kongruenzabbildung, wenn sie geraden- und längentreu ist. Das bedeutet, dass Geraden auf Geraden abgebildet werden und der Abstand zweier beliebiger Punkte mit dem der zugehörigen Bildpunkte übereinstimmt. Die Menge aller Kongruenzabbildungen soll an dieser Stelle mit  $B$  bezeichnet werden. Dabei bezeichnet man das Bild einer Figur  $F$  bei der Abbildung  $\sigma$  mit  $\sigma(F)$  oder kurz  $F'$ . Ist  $F' = \sigma(F)$  für ein

$\sigma \in B$ , dann heißt  $F'$  kongruent zu  $F$  und man schreibt  $F' \cong F$ . Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation in der Menge  $B$  aller Figuren der Ebene. Es gilt (Scheid & Schwarz 2017, S. 126):

- Jede Figur ist zu sich selbst kongruent ( $\cong$  ist reflexiv).
- Ist  $F_1 \cong F_2$ , dann ist auch  $F_2 \cong F_1$  ( $\cong$  ist symmetrisch).
- Ist  $F_1 \cong F_2$  und  $F_2 \cong F_3$ , dann ist auch  $F_1 \cong F_3$  ( $\cong$  ist transitiv).

Bei Abbildungen dieser Art ändert sich also ggf. nur die Lage der Figur, nicht aber die Gestalt oder die Größe (Krauter & Bescherer 2013, S. 20). Kongruenzabbildungen sind

- maßtreu (Längenmaße; Winkelmaße, Flächeninhalte),
- formtreu (Punkt  $\rightarrow$  Punkt; Gerade  $\rightarrow$  Gerade; Kreis  $\rightarrow$  Kreis) und
- lagebeziehungstreu (Inzidenz, Parallelen, Senkrechten).

Um einen verständnisvollen Umgang mit Figuren in der Ebene zu unterrichten, ist es wichtig für Lehrerinnen und Lehrer, Wissen über das Verhalten dieser Figuren bei bijektiven (umkehrbaren) Abbildungen auf sich selbst zu haben (Scheid & Schwarz 2017). Dieses Verständnis ist hilfreich um Unterrichtsprozesse zur Untersuchung von Figuren auf deren Eigenschaften, zur Definition von Begriffen, zum Beweisen von Sätzen und zur Konstruktion von Figuren zu unterstützen – Tätigkeiten, die von Lehrerinnen und Lehrern im Geometrieunterricht gefordert werden (vgl. Abschnitt 2.1.2). Im Folgenden werden die vier Typen von Kongruenzabbildungen ausgehend von der Achsenspiegelung im Einzelnen betrachtet und anschließend in Verbindung mit den Eigenschaften der entstehenden Figuren gebracht.

### 2.2.2.1 Achsenspiegelung

In der Grundschule wird entsprechend des Lehrplans überwiegend die Achsenspiegelung als Kongruenzabbildung der Ebene behandelt. Sie stellt somit die erste Kongruenzabbildung dar, die in der Schulzeit thematisiert wird. Eine Achsenspiegelung mit der Spiegelachse  $a$ , also die Spiegelung an einer Geraden  $a$ , wird als  $\sigma_a$  bezeichnet und wird definiert durch (Scheid & Schwarz 2017, S. 127):

- (1) Jeder Punkt der Achse  $a$  ist Fixpunkt, für  $P \in a$  ist also  $P' = P$ .
- (2) Für  $P \notin a$  ist  $a$  die Mittelsenkrechte der Strecke  $[PP']$ .

Durch eine (oder mehrere) Achsenspiegelungen  $\sigma_a$ , können **zwei** zueinander kongruente Figuren (vgl. Abbildung 3, links) oder **eine** achsensymmetrische Figur  $F$  (vgl. Abbildung 3, rechts) entstehen<sup>12</sup>.

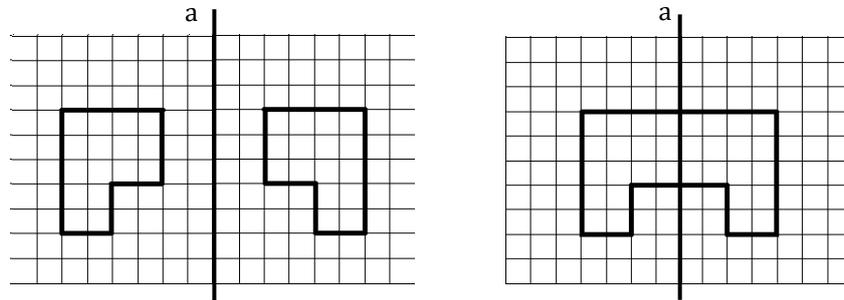


Abbildung 3: Achsenspiegelung  $\sigma_a$  an der Symmetrieachse  $a$  (rechts: es entsteht eine achsensymmetrische Figur; links: es entstehen zwei zueinander kongruente Figuren)

Abbildung 3 zeigt beispielhaft, dass die Achsenspiegelung im Gegensatz zu anderen Kongruenzabbildungen richtungsumkehrend ist – eine Eigenschaft, die insbesondere auch aus mathematikdidaktischer Sicht von Bedeutung ist (vgl. Abschnitt 2.3.3).

Die frühe Thematisierung der Achsenspiegelung bereits in der Grundschule (vgl. Abschnitt 2.1.2.1) ist aus mathematischer Sicht sinnvoll, da in der euklidischen Ebene jede Kongruenzabbildung selbst eine Achsenspiegelung ist oder als Verkettung von zwei oder drei Achsenspiegelungen dargestellt werden kann (Dreispiegelungssatz (u. a. Stein 1999; Scheid & Schwarz 2017)). Daraus ergeben sich Zusammenhänge der Achsenspiegelung mit weiteren Kongruenzabbildungen der Ebene.

#### 2.2.2.2 Doppelspiegelung

Die Verkettung zweier Spiegelungen mit den Achsen  $a$  und  $b$  nennt man eine Doppelspiegelung  $\sigma_a \circ \sigma_b$ . Eine Doppelspiegelung ist entweder eine Verschiebung oder eine Drehung (Scheid & Schwarz 2017) (vgl. Abbildung 4).

---

<sup>12</sup> Diese Unterscheidung ist insbesondere für die Grundschule wichtig, da sich daraus verschiedene Wege der Einführung von Symmetrie und Achsenspiegelung ergeben (vgl. Abschnitt 2.3.1.2).

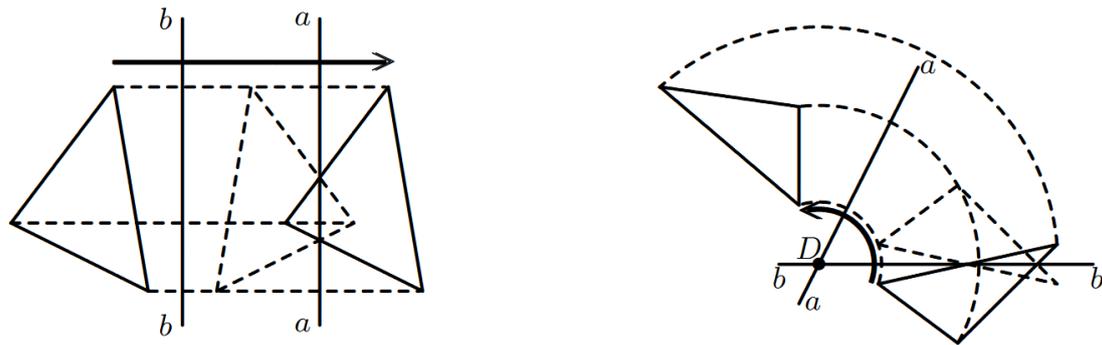


Abbildung 4: Verschiebung  $a \parallel b$  (links) und Drehung  $a \neq b$  (rechts) (aus Scheid & Schwarz 2017, S. 128)

**Verschiebung.** Sind die Achsen  $a$ ,  $b$  parallel, so handelt es sich bei der Doppelspiegelung  $\sigma_a \circ \sigma_b$  um eine *Verschiebung* (vgl. Abbildung 4, links). Die Verschiebung verläuft entlang eines Vektors rechtwinklig zu  $a$  um das Doppelte des Abstandes von  $a$  und  $b$ . Dabei wird in der Orientierung von  $b$  nach  $a$  hin verschoben (Scheid & Schwarz 2017). Eine Richtungsumkehrung der Figur findet also bei der Verschiebung nicht statt.

**Drehung.** Sind die Achsen  $a$ ,  $b$  nicht parallel, so handelt es sich bei der Doppelspiegelung  $\sigma_a \circ \sigma_b$  um eine *Drehung* (vgl. Abbildung 4, rechts). Schneiden sich die Achsen  $a$  und  $b$  in  $D$ , so ist  $D$  das Drehzentrum und die Drehung hat einen Drehwinkel, der doppelt so groß ist, wie der Winkel zwischen  $a$  und  $b$ .

**Punktspiegelung.** Schneiden sich die Spiegelachsen  $a$  und  $b$  orthogonal im Drehzentrum  $D$ , dann ist die Doppelspiegelung  $\sigma_a \circ \sigma_b$  eine Drehung  $D$  mit dem Drehwinkel  $180^\circ$ , also eine Punktspiegelung.

### 2.2.2.3 Dreifachspiegelung

Eine Dreifachspiegelung  $\tau = \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$  ist eine Spiegelung oder die Verkettung einer Spiegelung mit einer Verschiebung (nicht parallel zur Spiegelachse). Eine **Schubspiegelung** ist eine Dreifachspiegelung (Verkettung einer Achsenspiegelung mit einer Verschiebung), bei der die Spiegelachse in Richtung der Verschiebung liegt (Scheid & Schwarz 2017). Schubspiegelungen sind im Schulkontext insbesondere bei der Betrachtung von Mustern und Bandornamenten von Bedeutung.

### 2.2.3 Merkmale symmetrischer Figuren

Die Art der *Symmetrie*, also die Eigenschaft einer Figur „ist symmetrisch“ (vgl. Definition 2.2.1), wird immer mit Bezug auf die Kongruenzabbildung benannt. Im Rahmen dieser Arbeit

werden achsensymmetrische, punktsymmetrische, drehsymmetrische und schubsymmetrische Figuren angesprochen.

### 2.2.3.1 Achsensymmetrische Figuren

Eine Figur  $F$  der Ebene heißt *achsensymmetrisch*, wenn sie durch eine Achsenspiegelung  $\tau$  mit  $\tau(F) = F$  deckungsgleich auf sich selbst abgebildet werden kann. Die Merkmale achsensymmetrischer Figuren ergeben sich aus den bereits für die Achsenspiegelung definierten Eigenschaften: Es gibt mindestens eine Symmetrieachse  $a$ , zu jedem Punkt  $P$  gibt es einen Bildpunkt  $P'$  und beide haben den gleichen Abstand zur Symmetrieachse, eine achsensymmetrische Figur ist invariant bzgl. der Spiegelung an der Achse, die Figur zerfällt auf natürliche Weise in zwei deckungsgleiche Teile und alle Punkte der Figur, die auf der Symmetrieachse liegen, sind Fixpunkte.

### 2.2.3.2 Drehsymmetrische Figuren

Eine Figur  $F$  der Ebene heißt *drehsymmetrisch*, wenn sie durch eine Drehung  $\tau$  mit  $\tau(F) = F$  deckungsgleich auf sich selbst abgebildet werden kann. Schneiden sich bei einer Drehung (also der Doppelspiegelung  $\sigma_a \circ \sigma_b$ ) die beiden Achsen  $a$  und  $b$  beispielsweise in einem Winkel von  $60^\circ$ , so ist eine drehsymmetrische Figur invariant unter einer Drehung von  $120^\circ$ . Die Merkmale drehsymmetrischer Figuren ergeben sich wiederum aus der Definition der Drehsymmetrie (vgl. Abschnitt 2.2.2.2). Es gibt nur einen Fixpunkt (Drehzentrum) und jeder Punkt  $P$  hat denselben Abstand vom Drehzentrum wie seine Bildpunkte  $P'$ .

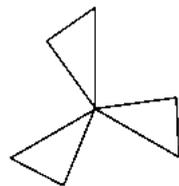


Abbildung 5: Drehsymmetrische Figur: Drehung um  $120^\circ$  und  $240^\circ$

### 2.2.3.3 Punktsymmetrische Figuren

Die Punktsymmetrie ist ein Sonderfall der Drehsymmetrie und besitzt somit auch dieselben Figureneigenschaften. Eine Figur  $F$  der Ebene heißt *punktsymmetrisch*, wenn sie durch eine Drehung  $\tau$  um  $180^\circ$  mit  $\tau(F) = F$  deckungsgleich auf sich selbst abgebildet werden kann.



Abbildung 6: Punktsymmetrische Figur: Drehung um  $180^\circ$

#### 2.2.3.4 Translationssymmetrische Figuren

Eine Translation entspricht der Hintereinanderausführung zweier Achsenspiegelungen an zwei parallelen Achsen. Der Verschiebevektor  $\vec{v}$  legt Richtung und Länge der Translation fest und steht senkrecht zu den beiden Achsen. Bei translationssymmetrischen Figuren wiederholt sich also eine Grundfigur periodisch in Translationsrichtung. Zu jedem Punkt einer translationssymmetrischen Figur gibt es somit unendlich viele mögliche Bildpunkte für Verschiebungen, unter denen die Figur invariant ist. Translationen haben keine Fixpunkte. Beispiele für translationssymmetrische Figuren sind beispielsweise Bandornamente.

Im Unterricht der Grundschule in Deutschland wird derzeit von den hier ausgeführten Kongruenzabbildungen konkret nur die Achsenspiegelung thematisiert. Wissen um die Einbettung der Achsenspiegelung in den Gesamtkontext der Kongruenzabbildungen sowie Wissen um die Symmetrieeigenschaften ebener Figuren ist für Lehrerinnen und Lehrer dennoch Hintergrundwissen, das benötigt wird, um propädeutisch ein grundlegendes Verständnis von Abbildungen und Symmetrien anzubahnen, welches auch für die Inhalte der Sekundarstufe tragfähig ist. Für ein erfolgreiches Unterrichten ist fachliches Wissen jedoch nicht ausreichend. Konkretes Wissen um den unterrichtlichen Aufbau des Inhaltsbereiches und altersgerechte Unterrichtsmethoden, Wissen um mögliche Schwierigkeiten und Fehlvorstellungen sowie um Strategien von Schülerinnen und Schülern sind dazu notwendig.

### 2.3 Fachdidaktisches Wissen mit dem Fokus auf das Unterrichten von Symmetrie und Achsenspiegelung

Fachdidaktisches Wissen ist „Fachwissen für das Unterrichten“ (Shulman 1986). Für das Unterrichten der Inhalte Symmetrie und Achsenspiegelung in der Grundschule gibt es verschiedene Aspekte fachdidaktischen Wissens, die von Relevanz sind. Dieses Unterkapitel dient dazu, einen Überblick über diese Aspekte zu geben. Spezifisches fachdidaktisches Wissen für das Unterrichten von Symmetrie und Achsenspiegelung steht also in diesem Unterkapitel im Mittelpunkt.

### 2.3.1 Sequenzierung der Unterrichtsinhalte und Aufgabenauswahl

Bei der Sequenzierung der Unterrichtsinhalte spielt neben allgemeinem entwicklungspsychologischem Wissen (wie bspw. zum Erwerb von Begriffen) vor allem mathematikspezifisches Wissen eine Rolle. Um Unterrichtsinhalte zu Symmetrie und Achsenspiegelung angemessen zu sequenzieren, hat insbesondere das Wissen um den geometrischen Begriffserwerb eine herausragende Stellung. Dazu gehören zum einen Erkenntnisse, welche Stufen und Phasen beim Erwerb eines Begriffsverständnisses (Vollrath 1984) durchlaufen werden. Diese werden nachfolgend ausführlich dargelegt. Zum anderen sind Grundprinzipien bei der Erarbeitung der Inhalte im Sinne eines konstruktiven Begriffserwerbs (vgl. Piaget & Inhelder 1972; auch Holland 1975; Vollrath 1984) zu beachten, wie beispielsweise Wege zur Einführung geometrischer Begriffe (u. a. Franke & Reinhold 2016).

#### 2.3.1.1 *Stufen des Begriffsverständnisses*

Vollrath (1984) beschreibt insgesamt vier Stufen des Begriffsverständnisses - intuitiv (Stufe 1), inhaltlich (Stufe 2), inhaltlich-integriert (Stufe 3) und formal (Stufe 4). Angelehnt an die Entwicklung des Begriffsverständnisses nach Vollrath beschreibt Kirsche (1992) die Stufen der Entwicklung des geometrischen Abbildungsbegriffes (und somit auch der Achsenspiegelung) für die Grundschule. Grundidee Kirsches (1992, S. 76) ist „durch eine schrittweise Analyse symmetrischer Figuren sowohl den Symmetriebegriff als auch den Abbildungsbegriff [...] aufzubauen.“ Für den Unterricht in der Grundschule und der sich anschließenden Sekundarstufe I sind lediglich die Stufen 1 bis 3 relevant (Kirsche 1992), welche im Folgenden ausgeführt werden.

**Intuitives Begriffsverständnis.** Auf der Stufe des intuitiven Begriffsverständnisses kennen die Schülerinnen und Schüler den Begriff als Phänomen und identifizieren Repräsentanten des Begriffes (Vollrath 1984) (vgl. phänomenologische, vorbegriffliche Kenntnis der Begriffe nach Kirsche (1992)). Auf dieser Stufe werden symmetrische Figuren als Ganzes wahrgenommen und augenscheinlich als symmetrisch betrachtet. Konkret-kinematische Verfahren (wie bspw. das Spiegeln) kommen auf dieser Stufe zum Einsatz und erste Begriffe wie „Spiegelbild“ oder „Spiegelinie“ entwickeln sich aus diesen Handlungen (Kirsche 1992). Schülerinnen und Schüler auf dieser Stufe können Beispiele symmetrischer Figuren (in Faltschnitten, Blättern, Schildern) zeigen, herstellen und nennen. Sie kennen Bezeichnungen symmetrischer Figuren und unterscheiden symmetrische Figuren nach Augenschein von nicht-symmetrischen Figuren (vgl. Kirsche 1992, S. 76).

**Inhaltliches Begriffsverständnis.** Auf der Stufe des inhaltlichen Begriffsverständnisses lernen die Kinder den Begriff als Träger von Eigenschaften kennen und kennen die Eigenschaften des Begriffes (Vollrath 1984) (vgl. handlungsgebundene, inhaltliche Kenntnis der Begriffe nach Kirsche (1992)). Die Schülerinnen und Schüler können symmetrische Figuren durch zeichnerisch-kinematische Verfahren (wie bspw. Falten, Wenden, ...) herstellen. Sie erkennen und beschreiben symmetrische Figuren als solche, zeichnen Achsen ein und begründen diese Entscheidungen (oft noch handlungsgebunden) (Kirsche 1992).

**Inhaltlich-integriertes Begriffsverständnis.** Auf der Stufe des inhaltlich-integrierten Begriffsverständnisses (vgl. inhaltliche, nicht-formale Kenntnis der Begriffe nach Kirsche (1992)) wird der Begriff als Teil eines Begriffsnetzes gesehen und die Beziehungen zwischen Eigenschaften werden hergestellt. Auch Beziehungen zu anderen Begriffen werden auf dieser Stufe verstanden (Vollrath 1984). Der Begriff der Symmetrie kann auf dieser Stufe beispielsweise als Klassifikationskriterium im Haus der Vierecke angewandt werden. Des Weiteren führen zeichnerisch-konstruktive Tätigkeiten (wie bspw. das Zeichnen von Spiegelbildern im Kästchengitter) dazu, dass symmetrische Figuren mehr und mehr als Punktmengen aufgefasst werden. Nach Kirsche (1992, S. 78) kann diese Stufe des Symmetrieverständnisses in der Grundschule „höchstens in Einzelaspekten angebahnt werden“.

Betrachtet man die Unterrichtsinhalte, die curricular für die Symmetrie und Achsenspiegelung für die Grundschule vorgegeben sind (vgl. Abschnitt 2.1.2), so ist festzustellen, dass sich diese im Bereich des intuitiven Begriffsverständnisses (Beginn der Grundschulzeit) und im Bereich des inhaltlichen Begriffsverständnisses (Ende der Grundschulzeit) verorten lassen.

#### *2.3.1.2 Zugänge zum Erwerb eines Verständnisses von Symmetrie und Achsenspiegelung*

Entsprechend der Erkenntnisse zu den Stufen des Begriffsverständnisses, gibt es in der Grundschule im Wesentlichen zwei mögliche didaktische Zugänge zum Thema Symmetrie. Gemeinsam ist beiden Zugängen, dass sie die Handlungserfahrungen der Schülerinnen und Schüler in den Mittelpunkt stellen und somit auch einen Aufbau des Begriffsverständnisses im Sinne eines konstruktiven Begriffserwerbs (Vollrath 1984) (vgl. auch operativer Begriffserwerb nach Bender (1978a, 1978b)) ermöglichen. Unter einem konstruktiven Begriffserwerb wird eine Vermittlung von Begriffen verstanden, bei der das Handeln mit Objekten eine große Rolle spielt (Vollrath 1984). Dies erfolgt durch alle Handlungen bei welchen Repräsentanten des Begriffs mit geeignetem Material hergestellt werden, beispielsweise durch das Legen, Falten, Schneiden oder Konstruieren einer achsensymmetrischen Figur oder zwei kongruenten

Figuren (Franke & Reinhold 2016). Die beiden didaktischen Zugänge zum Thema Symmetrie werden im Folgenden dargestellt und mit geeignetem Material illustriert.

**Zugang über symmetrische Figuren.** Nach Kirsche (1996) lässt sich durch ein Wechselspiel aus Analyse und Herstellung symmetrischer Figuren im Unterricht die Entwicklung des Abbildungsbegriffes herbeiführen. Anknüpfend an die Vorerfahrungen und an erste Begegnungen der Grundschülerinnen und -schüler mit dem Begriff Symmetrie im Sinne der Wohlproportioniertheit (vgl. nach Weyl, siehe Abschnitt 2.2.1), steht bei diesem Zugang der ästhetische Aspekt im Vordergrund. Es werden zunächst Beispiele *symmetrischer Figuren* aus dem Alltag (Verkehrsschilder, Spielkarten, Flaggen, etc.) betrachtet und auf ihre Eigenschaften hin untersucht. Durch die Analyse von Gemeinsamkeiten werden Eigenschaften symmetrischer Figuren erarbeitet. Auf diese Weise erkennen die Kinder, dass sich die Gesamtfigur in zwei deckungsgleiche Teile zerlegen lässt und identifizieren Symmetrie- bzw. Spiegelachsen einer Figur (Franke & Reinhold 2016). Durch den Einsatz von geeignetem Material (bspw. zwei durchsichtigen Geobrettern) kann gezeigt werden, dass symmetrische Figuren unverändert unter einer Spiegelung an der Spiegelachse bleiben (vgl. auch Kirsche 1996).

**Zugang über Kongruenzabbildungen.** Im Unterschied zum Zugang über symmetrische Figuren, werden bei diesem Zugang zunächst Kongruenzabbildungen auf eine Figur angewandt. Durch den Einsatz von geeignetem Material (bspw. Spiegel) bzw. geeigneten Aktivitäten (bspw. Erstellen von Klecksbildern oder Prickeln) werden über das Betrachten von Bild und Spiegelbild Erkenntnisse zum Identifizieren symmetrischer Figuren gewonnen. Die Schülerinnen und Schüler erfahren auf diese Weise, dass Achsenspiegelungen zu einer symmetrischen Figur führen können, wenn das Bild der Achse anliegt. Liegt das Bild nicht der Achse an, entstehen zwei kongruente Figuren (Bild und Spiegelbild). Anhand dieser Figuren und ihrer Bildfiguren werden Eigenschaften kongruenter, aber auch symmetrischer Figuren thematisiert (Franke & Reinhold 2016) (vgl. Abschnitt 2.2.3).

Wissen über den Aufbau und die Stufen des Begriffsverständnisses von Schülerinnen und Schülern kann eine erste Hilfe sein, um Unterrichtsinhalte und Aufgabenstellungen entsprechend einer Klassenstufe bzw. eines intendierten Ziels des Begriffserwerbs auszuwählen. Um jedoch im Unterricht adäquate Aufgaben einsetzen zu können, bedarf es zusätzlich aufgabenspezifischeren Wissens – insbesondere, wenn es darum geht, das inhaltliche Begriffsverständnis zu vertiefen oder spezielle Eigenschaften von Achsenspiegelungen herauszuarbeiten. Dazu bedarf es Wissen um Anforderungen, die Aufgaben inhärent und aufgabenspezifisch sind.

### 2.3.2 Wissen um Aufgaben und deren Schwierigkeiten

Aufgaben sind wichtige Bestandteile des Unterrichts, um Aktivitäten der Schülerinnen und Schüler zu steuern (Hammer 2016). Um Aufgaben im Unterricht gezielt zum Aufbau eines Begriffsverständnisses der Begriffe „Symmetrie“ und „Achsen Spiegelung“ einsetzen zu können, ist es wesentlich, sich mit einzelnen Merkmalen von Aufgaben zu beschäftigen. Forschungsergebnisse zu Aufgabenmerkmalen liefern Wissen, auf das Lehrerinnen und Lehrer zurückgreifen können, um Lernprozesse anzuregen. Im Folgenden werden Forschungsergebnisse zu inhaltlichen Aufgabenmerkmalen zusammengefasst, die einen Einfluss auf die Schwierigkeit von Aufgaben zu Symmetrie und Achsen Spiegelung haben. Trotz der engen Verzahnung der Symmetrie als Eigenschaft von Figuren und der Achsen Spiegelung als Kongruenzabbildung (vgl. Unterkapitel 2.2), werden die Aufgabenmerkmale hier getrennt betrachtet. Dies ist in den vorgeschlagenen Wegen zur Einführung der beiden Begriffe begründet (vgl. Abschnitt 2.3.1). Die unterrichtende Lehrkraft sollte demnach Wissen zu Schwierigkeiten von Aufgaben haben, die die Kongruenzabbildung in den Fokus stellen, aber auch Wissen um Schwierigkeiten von Aufgaben, die die Symmetrieeigenschaften einer Figur thematisieren.

#### 2.3.2.1 Schwierigkeitsgenerierende Merkmale bei der Achsen Spiegelung

Aus Studien, die zu Merkmalen von Aufgaben zur Achsen Spiegelung vorliegen, lassen sich unterschiedliche Merkmale ableiten, die die Aufgabenschwierigkeit beeinflussen.

**Lage der Achse.** Die Lage der Achse zum Blattrand stellt eines der wichtigsten Merkmale dar, welches die Schwierigkeit von Aufgaben – über alle Altersstufen hinweg – beeinflusst. Studien zeigen, dass Spiegelungen an vertikalen Achsen sowohl Grundschulkindern (Schmidt 1986) als auch Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe (Grenier 1985a, 1985b; Küchemann 1981) leichter fallen als Spiegelungen an horizontalen Achsen. Spiegelungen an schrägen Achsen fallen Schülerinnen und Schülern der Grundschule (u. a. Genkins 1978; Schmidt 1986) und der Sekundarstufe (Grenier 1985a, 1985b; Küchemann 1981) am schwersten.

**Komplexität der Figur.** Als weiteres schwierigkeitsgenerierendes Merkmal von Aufgaben zur Achsen Spiegelung – zusätzlich zur Lage der Achse – konnte in verschiedenen Studien auch die Komplexität der Figur identifiziert werden. Bereits Schulanfängerinnen und -anfänger vervollständigen durch Freihandzeichnungen einfache Figuren (bspw. ein Herz) erfolgreicher als komplexere Figuren (wie bspw. einen Stern oder eine Leiter) (Höglinger &

Senftleben 1997). In ihrer Studie mit Schülerinnen und Schülern im Alter von 11 bis 15 Jahren zeigten Küchemann (1981) und Grenier (1985a, 1985b), dass die Lösungsrate von Aufgaben bei zunehmender Komplexität der zu spiegelnden Figuren sinkt. Die von den Schülerinnen und Schülern zu spiegelnden Objekte variierten dabei von einfachen Punkten (mit hohen Lösungsraten) über Strecken bis hin zu Fahnen (mit geringen Lösungsraten).

**Ausrichtung der Figur zur Spiegelachse.** Zusätzlich zur Lage bzw. Ausrichtung der Spiegelachse zum Blattrand und zur Komplexität der Figur konnte auch die Ausrichtung der Figur in Bezug zur Spiegelachse als Merkmal herausgestellt werden, welches die Aufgabenschwierigkeit beeinflusst. Hat das zu spiegelnde Objekt eine zur Spiegelachse orthogonal oder parallel liegende Seite, so werden die Aufgaben besser bearbeitet (Küchemann 1981; Grenier 1985a). Ebenso werden Aufgaben zur Achsenspiegelung von Schülerinnen und Schülern im Alter von 11-15 Jahren besser gelöst, wenn entweder das Objekt selbst oder die Achse vertikal zum Blattrand ausgerichtet sind. Aufgaben mit schräg zum Blattrand ausgerichteter Achse und auch Aufgaben mit schräg zum Blattrand liegendem Objekt (abweichend von der Vertikalen bzw. Horizontalen)<sup>13</sup>, stellten sich als besonders schwierig heraus.

**Untergrund.** Bisherige Studien konnten keinen systematischen Unterschied in der Aufgabenschwierigkeit feststellen, der auf den Untergrund, auf dem die Spiegelung durchgeführt wird (bspw. Kästchengitter, Blankopapier), zurückzuführen ist (Küchemann 1981; Grenier 1985a). Das Kästchengitter kann unterstützen, den Abstand und die Richtung der Spiegelung genauer zu bestimmen (Küchemann 1981), jedoch gibt es gewisse Fehlertypen, die auf Kästchenpapier vermehrt auftreten (bspw. das Verschieben der Figur entlang der Kästchengitterlinien) (Grenier 1985a) (siehe Abschnitt 2.3.3).

### 2.3.2.2 *Stufen des Verständnisses von Achsenspiegelungen*

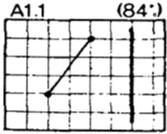
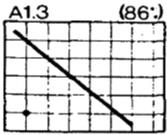
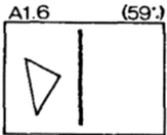
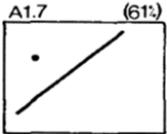
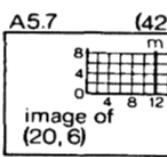
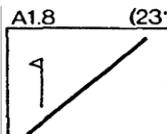
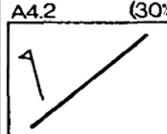
Aufgabenschwierigkeiten können dazu dienen, Stufen des Verständnisses von Achsenspiegelungen zu beschreiben. Küchemann (1981) entwickelt anhand seiner Erkenntnisse zu Aufgabenschwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern im Alter von 14 Jahren Stufen des Verständnisses von Achsenspiegelungen. Diese Stufen erläutert Küchemann an beispielhaften Aufgaben, welche er in Gruppen mit ähnlichen Anforderungen zusammenstellt, wobei er versucht das kindliche Verständnis zu beschreiben. Schülerinnen und Schüler befinden sich nach

---

<sup>13</sup> Unter einem schräg zum Blattrand liegenden Objekt werden in diesen Studien Objekte verstanden, die weder eine parallel noch eine orthogonal zum Blattrand liegende Seite haben.

Küchemann (1981) auf einer bestimmten Stufe, wenn sie entsprechende Aufgaben richtig beantworten können.

Tabelle 2: Levels of understanding of reflection nach Küchemann (1981); Abbildungen vgl. Küchemann (1981, S. 149)

Level 0	Auf diesem Level werden Aufgaben gelöst, die keine Neigungskoordination erfordern (Aufgaben mit einzelnen Punkten oder einer Spiegelung an einer vertikalen Achse).	
Level 1	Schülerinnen und Schüler sind auf diesem Level nicht in der Lage Neigungen zu koordinieren. Die korrekte Lösung von Aufgaben an vertikalen Spiegelachsen oder die Spiegelung einzelner Punkte gelingt. Nach Küchemann wird auf dieser Stufe das Kästchengitter noch benötigt, um Spiegelungen durchzuführen. Spiegelungen von Punkten ohne Kästchengitter verleiten Schülerinnen und Schüler auf diesem Level zum direkten Spiegeln über die Achse.	 
Level 2	Auf diesem Level sind Schülerinnen und Schüler in der Lage, Neigungen hinreichend zu koordinieren. Zur Spiegelung von Dreiecken schreibt Küchemann (1981), dass die Schülerinnen und Schüler im Vorgehen zunächst einen Eckpunkt lokalisieren und dann beide anliegenden Seiten im richtigen Winkel zeichnen. Das Ergänzen der beiden anliegenden Seiten geschieht jedoch nicht in der richtigen Lage: Die dritte Seite wird „falsch geneigt“ gezeichnet.	 
Level 3	Bezüglich der Spiegelung einer Fahne an einer schrägen Achse gibt es nach Küchemann (1981) keinen Unterschied zwischen Level 2 und Level 3. Jedoch sind Schülerinnen und Schüler in der Lage, an Achsen zu spiegeln und den Punkt dabei analytisch zu ermitteln, auch wenn der Punkt außerhalb des abgebildeten Koordinatensystems liegt (siehe Abb. rechts, A5.7).	
Level 4	Schülerinnen und Schüler auf diesem Level lösen Aufgaben durch analytisches Herangehen und lösen auch Aufgaben zur Spiegelung von Fahnen an schrägen Achsen (siehe rechts, Aufgabe A4.2).	 

Eine zentrale Rolle bei der Beschreibung des Anforderungsniveaus einzelner Aufgaben nimmt bei Küchemann (1981) das Konzept des Beibehaltens von Winkeln ein. Haben Kinder die noch intuitive Vorstellung, dass eine Achsenspiegelung das Objekt „auf die andere Seite der Achse bringt“, so ist dieses Konzept von besonderer Bedeutung. Zwar müssen bei der Spiegelung einer Figur an einer Achse immer Winkel beachtet und beibehalten werden, jedoch stellen

sich einige Aufgaben als anspruchsvoller als andere heraus. So muss beispielsweise bei der Spiegelung an vertikalen Achsen nur die Neigung der Figur (bzw. einer Seite der Figur) beachtet und beibehalten werden – gleiches gilt für die Spiegelung eines Punktes an einer schrägen Achse (Küchemann 1981). Wenn eine Seite dementsgegen nicht parallel zur Achse liegt und ein intuitives Vorgehen (wie oben beschrieben) erfolgt, dann muss der Winkel zwischen den Neigungen der Achse und der entsprechenden Seite konserviert und (auf die zu zeichnende Bildfigur im Sinne des „Beibehaltens von Winkeln“) übertragen werden (vgl. Küchemann 1981). In der folgenden Tabelle werden wesentliche Aufgabenmerkmale erläutert und wesentliche Aspekte, die verstanden sein müssen, um diese Aufgaben zu lösen, beschrieben. Küchemann (1981) vermutet, dass Aufgaben, die auf Level 1 und 2 liegen, konkret-operationales Denken (vgl. Piaget & Inhelder 1971, 1972) erfordern, da sie sehr nah an der Handlung des Faltens liegen. Zum Lösen der Aufgaben auf Level 3 und 4 werden analytische und abstrakte Vorgehensweisen benötigt – dies entspricht einem anfänglichen Verständnis auf der formal-operationalen Stufe nach Piaget und Inhelder (1971, 1972).

### 2.3.2.3 Schwierigkeitsgenerierende Merkmale bei Aufgaben zur Symmetrie

Aufgabenmerkmale, die einen Einfluss auf das Erkennen der Symmetrieeigenschaft von Figuren haben, werden im Folgenden zusammengetragen.

**Lage der Achse – Wahrnehmung unterschiedlicher Symmetrien.** Noch bevor in der Kindertagesstätte bzw. der Schule bewusst Erfahrungen zu Symmetrien gesammelt werden, liegen bereits Unterschiede in der Wahrnehmung unterschiedlicher Symmetrien vor (Bornstein, Ferdinandsen & Gross 1981; Fisher, Ferdinandsen & Bornstein 1981; Bornstein & Krinsky 1985). So zeigen Studien zu Aufmerksamkeitszeiten beispielsweise, dass bereits in der frühen Kindheit Kinder der vertikalen Symmetrie bevorzugt ihre Aufmerksamkeit schenken (Bornstein et al. 1981) oder die vertikale Symmetrie vor anderen Symmetrien<sup>14</sup> bevorzugt betrachten (Fisher et al. 1981). Diese Sonderrolle der vertikalen Symmetrie bleibt bis ins Grundschulalter hinein bestehen. Boswell (1976) zeigt in ihrer Analyse verschieden-symmetrischer Punktemuster<sup>15</sup> einen Zusammenhang zwischen der Lösungshäufigkeit und der Art der Sym-

---

<sup>14</sup> Neben vertikal-symmetrischen Figuren wurden den Kindern auch horizontal-symmetrische und asymmetrische Figuren vorgelegt.

<sup>15</sup> Die von Boswell (1976) verwendeten Punktmuster waren asymmetrisch, horizontal-symmetrisch, vertikal-symmetrisch und doppelsymmetrisch (vertikal- und horizontal-symmetrisch).

metrie des Punktemusters. In dieser Studie sollten die Probanden (Kindergartenkinder, Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 2 und 4) Punktemuster nach dem Betrachten reproduzieren.

**Lage der Achse – Unterscheiden symmetrischer Figuren von nicht-symmetrischen Figuren.** Neben der besonderen Wahrnehmung vertikaler Symmetrien gibt es einige Studien, die sich mit dem Identifizieren von symmetrischen Figuren befassen. Diese Studien nehmen insbesondere das Unterscheiden symmetrischer von nicht-symmetrischen Figuren in den Fokus. Kinder im Vorschulalter unterscheiden bereits symmetrische von nicht-symmetrischen Figuren. Die Unterscheidung vertikal-symmetrischer Figuren von nicht-symmetrischen Figuren fällt den Kindern am leichtesten (Bornstein & Stiles-Davis 1984; vgl. auch Genkins 1978). Die Unterscheidung horizontal-symmetrischer Figuren von nicht-symmetrischen Figuren fällt den Kindern schwerer. Am schwersten fällt den Kindern die Unterscheidung diagonal-symmetrischer Figuren von nicht-symmetrischen Figuren (Bornstein & Stiles-Davis 1984). Die Autoren folgern aus insgesamt drei Experimenten mit 4- bis 6-Jährigen, dass die Entwicklung des Symmetrieverständnisses mit dem Erkennen vertikaler Symmetrien beginnt, gefolgt vom Erkennen horizontaler Symmetrien. Das Erkennen schräg-symmetrischer Figuren stellt einen weiteren Schritt in der Entwicklung des Symmetrieverständnisses dar (Bornstein & Stiles-Davis 1984). Ähnliche Ergebnisse zeigen sich auch bei einer Studie mit Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 4 (n=2917) zum Einzeichnen von Symmetrieachsen in ebene Figuren (Schmidt 1986). Zeichneten die Schülerinnen und Schüler in das Quadrat nur zwei Symmetrieachsen ein, so waren dies überwiegend die vertikal und horizontal zum Blattrand liegenden Symmetrieachsen. Auch beim Einzeichnen der Symmetrieachsen in gleichschenklige Dreiecke (in unterschiedlicher Lage) vermutet der Autor einen Unterschied aufgrund der Lage der Achsen: Die Symmetrieachse, die in den gleichschenkligen Dreiecken schräg zum Blattrand eingezeichnet werden sollte, wurde seltener von den Schülerinnen und Schülern eingezeichnet, als die vertikal zum Blattrand liegende Symmetrieachse.

**Komplexität der Figur.** Nach Bornstein und Stiles-Davis (1984) hängt das Identifizieren einer symmetrischen Figur bzw. das Unterscheiden einer symmetrischen von einer nicht-symmetrischen Figur nicht nur von der Lage der Achse ab, sondern auch von der Komplexität der Figur: Kinder, die ein bestimmtes vertikal-symmetrisches Muster als symmetrisch identifizieren, identifizieren nicht gleichermaßen alle anderen vertikal-symmetrischen Muster als symmetrisch (Bornstein & Stiles-Davis 1984, S. 642). Mit der Komplexität der Figur bzw. eines Musters geht einher, dass vermutlich auch die Anzahl der Symmetrieachsen einen

Einfluss auf die Schwierigkeit von Aufgaben zur Achsensymmetrie hat (Franke & Reinhold 2016). Hinweise darauf geben die in den Untersuchungen von Schmidt (1986) und Xistouri (2007) verwendeten Aufgabenstellungen zum Einzeichnen von Symmetrieachsen in ebene Figuren. In beiden Fällen wurden Aufgaben, in die mehr Achsen einzuzeichnen waren, schlechter gelöst. Ob dies auf die Komplexität der Figur zurückzuführen ist, oder auf die Tatsache, dass beim Einzeichnen mehrerer Achsen auch mehr Achsen vergessen werden können, ist nicht geklärt.

**Symmetrieeigenschaften der Figuren.** Nicht zu allen möglichen Aufgabenmerkmalen liegen eindeutige Erkenntnisse vor. Bezüglich der Rolle allgemeiner Symmetrieeigenschaften von Figuren auf das Erkennen dieser Figuren als achsensymmetrisch gibt es erste Hinweise. Sind Figuren *punktsymmetrisch* oder *punkt- und achsensymmetrisch* so werden diese seltener richtig als achsensymmetrisch bzw. nicht-achsensymmetrisch erkannt, als Figuren mit anderen Symmetrien (Genkins 1978; Schmidt 1986).

Diese hier zusammengestellten Merkmale von Aufgaben zur Achsenspiegelung und Achsensymmetrie stehen nicht isoliert, sondern beeinflussen im Wesentlichen auch Fehler, die Schülerinnen und Schüler machen (können). Gewisse Aufgabenmerkmale können sogar hilfreich sein, um Fehler „zu provozieren“ – mit dem Ziel, Fehlvorstellungen aufzudecken. Im folgenden Abschnitt werden typische Fehler, die bei Aufgaben zur Symmetrie und Achsenspiegelung auftreten, dargestellt und mit den in diesem Abschnitt geschilderten Aufgabenmerkmalen in Verbindung gebracht.

### 2.3.3 Wissen um typische Fehler und Fehlvorstellungen

Im Umgang mit Fehlern von Schülerinnen und Schülern geht es insbesondere darum, konstruktiv mit Fehlern umzugehen und diese als Lernchance bzw. Ausgangspunkt gezielter Fördermaßnahmen zu sehen (Lorenz & Radatz 1993). Wichtig für den Umgang mit Fehlern ist das didaktische Wissen der Lehrperson, darüber, wie die Fehlersituation konstruktiv genutzt werden kann, indem ausgehend von der Fehlersituation Lernprozesse angestoßen werden (Spychinger, Oser, Hascher & Mahler 1999)<sup>16</sup>. Bei der Betrachtung von Fehlern gilt es grund-

---

<sup>16</sup> Ein bedeutender Teil der Fehlerkultur im Unterricht ist der Umgang mit Fehlern in der Unterrichtssituation selbst, welcher auch aus sozialen Gesichtspunkten eine hohe Herausforderung darstellt. Dieser Punkt wird in dieser Arbeit bewusst ausgeklammert, da hier die inhaltlichen und nicht die sozialen Facetten des Handelns von Lehrpersonen im Vordergrund stehen.

sätzlich zu unterscheiden zwischen typischen Fehlern und systematischen Fehlern (Käser 2011). Systematische Fehler lassen sich als Fehler beschreiben, welche die *individuelle* Leistung einer Schülerin bzw. eines Schülers charakterisieren. Typische Fehler hingegen, sind Fehler, die bei Aufgaben des gleichen Typs *in der Gesamtheit* der Schülerinnen und Schüler häufig auftreten (Käser 2011). Für vorliegende Arbeit sind zunächst typische Fehler von Bedeutung, da diese einen engen Zusammenhang zu den bereits berichteten Aufgabenmerkmalen aufweisen (können). Wissen um systematische Fehler ist für Lehrkräfte erforderlich, um an den aktuellen Lernprozess jeder Schülerin bzw. jedes Schülers anzuknüpfen und somit einen soliden Wissensaufbau zu ermöglichen (Spychinger et al. 1999).

### 2.3.3.1 *Typische Fehler und Fehlvorstellungen bei Aufgaben zur Achsenspiegelung*

Wissen zu typischen Fehlern und damit einhergehenden Fehlvorstellungen, die bei Aufgaben zur Achsenspiegelung immer wieder auftreten, liegt bereits aus einigen Studien vor. Die Ergebnisse dieser Studien werden nachfolgend kurz dargestellt. Dabei wird auch im Folgenden zwischen Fehlern unterschieden, die bei Achsenspiegelungen auftreten, die zu zwei zueinander kongruenten Figuren führen<sup>17</sup> und bei solchen, die zu einer symmetrischen Figur<sup>18</sup> führen.

**Vervollständigung der Figur.** Werden Schulanfängerinnen und Schulanfänger aufgefordert, Figuren wie beispielsweise einen Stern, spiegelbildlich zu vervollständigen, so geschieht dies durch das Ergänzen einer anliegenden Figur dem Weltwissen entsprechend (Höglinger & Senftleben 1997).

**Verschiebung der Figur.** Höglinger und Senftleben (1997) zeigen in ihren Untersuchungen, dass das Fertigstellen von der Achse anliegenden Figuren oft fehlerhaft als Verschiebung erfolgt. Studien zur Spiegelung von nicht an der Achse anliegenden Figuren, die mit Schülerinnen und Schülern im Alter von 11 bis 15 Jahren durchgeführt wurden, unterstützen diese Erkenntnisse. Fehlerhafte Lösungen der Schülerinnen und Schüler bei der Achsenspiegelung von nicht-anliegenden Objekten (z. B. Strecken oder Fahnen) zeigen „Spiegelfiguren“ der Figur (Abbildung 7, (s)), die entlang der Horizontalen (vgl. Abbildung 7, Strecke (a)) oder Vertikalen (vgl. Abbildung 7, Strecke (d)) parallel zur Figur verschoben gezeichnet sind (Küchemann 1981; Grenier 1985b; Denys & Grenier 1986; Lima 2006).

---

<sup>17</sup> Im Folgenden wird dies aus Gründen der Einfachheit als die Spiegelung nicht-anliegender Figuren bezeichnet.

<sup>18</sup> Im Folgenden wird dies auf Gründen der Einfachheit als die Spiegelung anliegender Figuren bezeichnet.

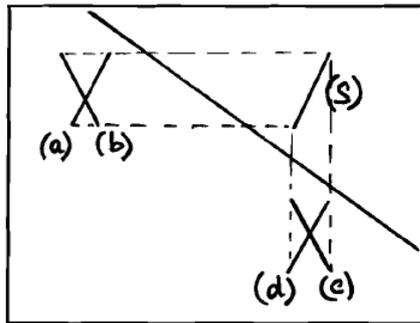


Abbildung 7: Fehler der Schülerinnen und Schüler bei der Spiegelung an schrägen Achsen – exemplarisch bei der Spiegelung einer Gerade (s). Verschiebung: (a) und (d). Spiegelung an einer gedachten vertikalen (b) oder horizontalen (c) Achse (Abbildung aus Grenier 1985b, S. 62).

Auch Schülerinnen und Schüler im Alter von ca. 13 Jahren, die komplexere Objekte (bspw. Häuser) an einer Achse spiegeln sollten, verschoben die Objekte (Häuser) entlang einer Horizontalen über die Achse (Lima 2006; vgl. Abbildung 8, Mitte). Die Verschiebung von Figuren tritt sowohl bei vertikalen, horizontalen als auch schrägen Achsen auf. Bei diesen Verschiebungen wird die Orientierungsumkehrung der Achsenspiegelung nicht beachtet. Ein möglicher Grund, könnte die noch intuitive Vorstellung sein, dass durch eine Spiegelung die Figur „auf die andere Seite der Achse gebracht“ werden muss (Küchemann 1981; Ramful, Ho & Lowrie 2015). Hier zeigt sich der Zusammenhang zu Aufgabenmerkmalen: Diese Fehlvorstellung kann nur aufgedeckt werden, wenn eine nicht-symmetrische Figur gespiegelt wird. Bei der Spiegelung symmetrischer Figuren (z. B. einer Gerade oder eines Quadrats mit Seiten parallel zur Achse) an vertikalen und horizontalen Achsen unterscheidet sich die richtige Lösung einer Achsenspiegelung nicht von der falschen Lösung einer Verschiebung der Figur.

**Verlängerung von Teilen der Figur.** Ein weiterer Fehler, der bei Spiegelung von Bildern (nicht anliegend) an Achsen auftritt, ist die Konstruktion der Spiegelfigur ausgehend von der Verlängerung von Strecken der Figur.

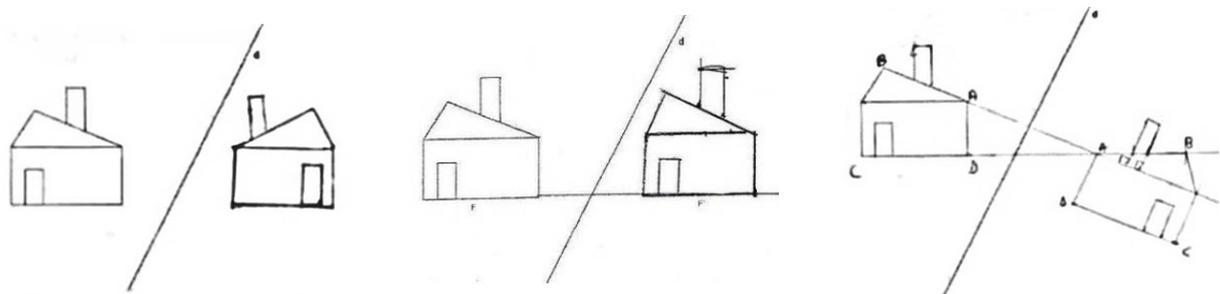


Abbildung 8: Beispiele zu Fehlern in der Sekundarstufe aus Lima (2006, S. 160). Von links nach rechts: Spiegelung an einer gedachten vertikalen Achse, Verschiebung der Figur und Verlängerung von Teilen der Figur.

Ausgehend von den verlängerten Teilen der Figur in der Bildfigur wird dann die Bildfigur fertiggezeichnet (Lima 2006; vgl. Abbildung 8, rechts). Auch an dieser Stelle zeigt sich der Zusammenhang mit Aufgabenmerkmalen: Ob die Verschiebung der Strecken bei Küchemann (1981) und Grenier (1985) einer solchen gedanklichen Verlängerung des Objektes entspricht, ist auf Grund der geringen Komplexität des Objektes (Strecke) nicht immer zu beurteilen. Bei zur Achse orthogonal liegenden Objekten kann diese Fehlvorstellung nicht aufgedeckt werden, da sich auch hier die richtige Lösung der Spiegelung und die falsche Lösung der Verlängerung über die Achse hinweg nicht unterscheiden.

**Spiegelung an gedachter vertikaler bzw. horizontaler Achse.** Dieser Fehler tritt insbesondere bei der Spiegelung nicht-anliegender Figuren an schrägen Spiegelachsen auf. Die schräge Ausrichtung der Spiegelachse wird ignoriert und das Objekt wird an einer gedachten vertikal oder horizontal ausgerichteten Spiegelachse gespiegelt (Grenier 1985b; Denys & Grenier 1986; vgl. Abbildung 7, Strecken (b) und (c); auch Lima 2006, Abbildung 8, links). Nach Küchemann (1981) tritt dies insbesondere dann auf, wenn das Objekt<sup>19</sup> selbst horizontal oder vertikal zum Blattrand ausgerichtet ist. Auch für die Diagnostik dieses Fehlers zeigt sich der Zusammenhang mit Aufgabenmerkmalen: Ist die Aufgabe gegeben, eine symmetrische Figur an einer schrägen Achse zu spiegeln, so kann dieser Fehler im Produkt der Schülerinnen und Schüler nicht unterschieden werden von einer Verschiebung entlang einer Horizontalen bzw. Vertikalen: Die Bildfiguren dieser beiden fehlerhaften Vorgehensweisen unterscheiden sich nicht. Die Vorstellungen, die hinter den jeweiligen Bildfiguren stehen, unterscheiden sich jedoch schon. Im Fall der Spiegelung an einer gedachten vertikalen bzw. horizontalen Achse scheint die Vorstellung, dass das gespiegelte „Objekt andersherum ist“ (Küchemann 1981) zur Lösung geführt zu haben. Die Tatsache, dass bezüglich der eingezeichneten Spiegelachse gelten muss, dass sie Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke von Punkt und Bildpunkt ist (Orthogonalität), wird in diesem Fall vernachlässigt. Im Fall der Verschiebung entlang einer gedachten Horizontalen bzw. Vertikalen ist die Vorstellung der Orientierungsumkehrung nicht beachtet.

---

<sup>19</sup> In der Studie von Küchemann (1981) wurden überwiegend Punkte, Strecken und Fahnen gespiegelt.

### 2.3.3.2 Typische Fehler und Fehlvorstellungen beim Erkennen von Achsensymmetrie bzw. beim Einzeichnen von Symmetrieachsen

Es liegen nur wenige Erkenntnisse zu Fehlern beim Erkennen von Achsensymmetrie bzw. beim Einzeichnen von Symmetrieachsen in ebene Figuren vor. Diese werden im folgenden Abschnitt geschildert.

Die Punktsymmetrie einer Figur scheint nicht nur einen Einfluss auf das Identifizieren dieser Figur als achsensymmetrisch bzw. nicht-achsensymmetrisch zu haben, sondern auch typische fehlerhafte Lösungen nach sich zu ziehen (Genkins 1978) (vgl. Abschnitt 2.3.2.3).

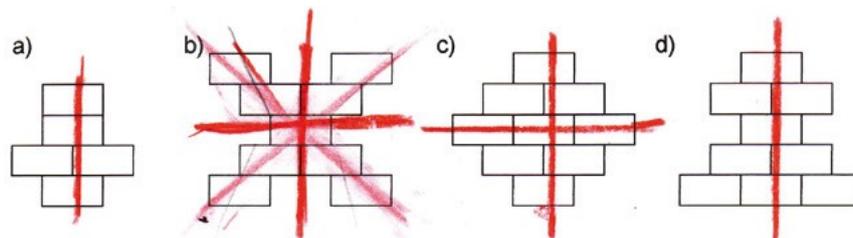


Abbildung 9: Einzeichnen von Symmetrieachsen aus dem Praxisbericht von Grohe (2011, S. 28)

Ähnlich dieser Vermutung berichtet Grohe (2011) in einem Praxisbericht, dass Schülerinnen und Schüler dazu neigen, zusätzliche fehlerhafte Achsen in solche Figuren einzuzeichnen, die sowohl punktsymmetrisch als auch achsensymmetrisch sind (z. B. vgl. Abbildung 9, Diagonalen in Figur b). Dass gewisse Lösungsmuster häufiger in bestimmten Figuren auftreten, zeigte auch die Studie von Schmidt (1986): Vor allem Diagonalen und Parallelen durch die Seitenmitten gewisser Figuren wurden fehlerhaft als Symmetrieachsen identifiziert (z. B. im Parallelogramm). Diese Fehler ergänzen sich mit Fehlvorstellungen, die aus qualitativen Studien mit Schülerinnen und Schülern (u. a. Genkins 1987) gewonnen werden konnten. Eine häufige Fehlvorstellung ist, dass einer Figur eine Symmetrieachse zugeschrieben wird, wenn sie in zwei deckungsgleiche Hälften zerlegt werden kann. Dass dies jedoch nur *eine* Bedingung ist, die zusätzlich noch durch die Bedingung der Richtungsumkehrung bezüglich einer Achse ergänzt werden muss, wird in diesen Fällen außer Acht gelassen.

Ob hinter den in diesem Abschnitt beschriebenen Fehlern und Fehlvorstellungen tatsächlich falsche Vorstellungen stehen oder ob es sich lediglich um sogenannte Präkonzepte, also Vorstellungen, die ohne ein spezifisches Vorwissen bei den Kindern entstehen, – wie man sie aus den Naturwissenschaften kennt (vgl. bspw. Barke 2006; Feige, Rutsch, Dörfler & Rehm 2017) – handelt, kann aus schriftlichen Schülerlösungen nicht gedeutet werden. Hilfreich zur Auf-

deckung von Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler können an dieser Stelle das Beobachten der Vorgehensweisen und Strategien sein – auch mündliche Äußerungen der Schülerinnen und Schüler zum Bearbeitungsprozess dienen diesem Zwecke.

#### 2.3.4 Wissen um Strategien

Das Wissen um Vorgehensweisen und Strategien der Schülerinnen und Schüler ist ein weiterer wichtiger Bestandteil des professionellen Wissens von Lehrkräften in Bezug auf das Unterrichten der Inhalte Achsenspiegelung und Symmetrie. Erkenntnisse zu allgemeinen Strategien zum Lösen von Aufgaben mit geometrischen (und insbesondere auch raumgeometrischen) Inhalten können auf Strategien zum Lösen von Achsenspiegelungs- und Symmetrieraufgaben übertragen werden.

Allgemein gesprochen werden zwei Strategien unterschieden: Die holistische Strategie (oder auch whole approach) und die analytische Strategie (auch part approach) (Barratt 1953; Cooper 1976; Schultz 1991; Just & Carpenter 1985). Ein holistisches Vorgehen beim Lösen einer Aufgabe bedeutet, dass das geometrische Objekt als Ganzes betrachtet wird. Unter einer analytischen Strategie wird hingegen verstanden, wenn im Lösungsprozess Teile des Objektes zur Lösungsfindung einzeln betrachtet und miteinander in Beziehung gesetzt werden.

Diese Vorgehensweisen lassen sich auch auf das Vorgehen beim Lösen von Aufgaben zur Achsenspiegelung und Achsensymmetrie übertragen. Qualitative Beobachtungen der Lösungsprozesse von Schülerinnen und Schülern identifizierten sowohl holistische, analytische als auch semi-analytische Vorgehensweisen (Grenier 1985b; Tahri 1993; Lima 2006; Ramful et al. 2015.; siehe auch Küchemann 1981). Gehen die Schülerinnen und Schüler bei der Achsenspiegelung holistisch vor, so wird die Figur als Ganzes gesehen und gespiegelt. Häufig gehen damit auch Vorstellungen des Faltens oder des Spiegeln einher, um abzuschätzen, an welcher Stelle die Spiegelfigur liegt (Tahri 1993; Lima 2006). Dieses Vorgehen ist insbesondere auch bei Schulanfängerinnen und -anfängern zu vermuten, die Aufgabenstellungen besser lösen, bei denen sie die Gesamtfigur erkennen (Höglinger & Senftleben 1997; Kurina, Ticha & Hospesova 1996). Bei einer analytischen Vorgehensweise werden die Eigenschaften der Achsenspiegelung auf jeden Punkt bzw. auf charakteristische Punkte der Figur angewandt, um auf diese Weise alle Punkte der Bildfigur zu erzeugen. Ein semi-analytisches Vorgehen kann als Kombination aus analytischem und holistischem Vorgehen gesehen werden. Dieses Vorgehen wird von Autorinnen und Autoren bei fehlerhaften Lösungen von Schülerinnen und Schülern im Alter von 13 bis 15 Jahren identifiziert – sowohl bei Aufgaben zur Achsenspiegelung von

Strecken bzw. Fahnen (Küchemann 1981; Grenier 1985b) als auch bei komplexeren ebenen Figuren (Tahri 1993; Lima 2006; Ramful et al. 2015). Gemein ist den oben beschriebenen Vorgehensweisen, dass zunächst ein Punkt (oder eine Strecke) an der Achse korrekt gespiegelt wird (analytischer Teil der Vorgehensweise) und vom Spiegelbild dieses Punktes (dieser Strecke) ausgehend, dann der Rest der Figur fertiggezeichnet wird (holistischer Teil der Vorgehensweise), ohne einen weiteren Punkt korrekt zu spiegeln (Küchemann 1981; Lima 2006).

## 2.4 Diagnostisches Wissen mit dem Fokus auf das Unterrichten von Symmetrie und Achsenspiegelung

Bisher beschriebene Facetten des professionellen Wissens von Lehrerinnen und Lehrern wurden hinsichtlich des Unterrichts von Symmetrie und Achsenspiegelung fachspezifisch aufgearbeitet. Um fachlich fundierte und pädagogisch sinnvolle diagnostische Urteile über die Schülerinnen und Schülern zu unterschiedlichen Lernzeitpunkten zu treffen, muss sowohl Wissen aus fachspezifischen Facetten professionellen Wissens (*fachdidaktisches Wissen, fachliches Wissen, curriculares Wissen*) als auch fachübergreifendes Wissen (*pädagogisch-psychologisches* und *allgemein-didaktisches*) herangezogen werden (vgl. Abschnitt 1.2.4, Abbildung 2, S. 32).

Das fachliche, das fachdidaktische, das pädagogisch-psychologische sowie das curriculare Wissen von Lehrerinnen und Lehrern haben Einfluss auf die Qualität diagnostischer Prozesse der Unterrichtsgestaltung und darauf, ob ausgehend von einem Ist-Zustand durch pädagogisch-fachdidaktische Entscheidungen ein Soll-Zustand erreicht wird. Auf diese Weise kann eine differenzierte Diagnostik, bezogen auf die Leistungsentwicklung der Schülerinnen und Schüler, stattfinden (Wollring 2006). Betrachtet man diagnostisches Wissen, welches im Kontext des Unterrichts der Inhalte Symmetrie und Achsenspiegelung auf Seiten der Lehrkräfte benötigt wird, so muss Wissen fachübergreifender und fachspezifischer Facetten professionellen Wissens ineinandergreifen – insbesondere, wenn es darum geht, Fehler der Schülerinnen und Schüler einzuordnen. Die Ursache eines Fehlers bei der Achsenspiegelung beispielsweise könnte sowohl fachspezifisch (bspw. auf das Verständnis des Abstandes von Punkt und Bildpunkt bezogen) oder aber auch fachübergreifend (bspw. auf die motorischen Fähigkeiten bezogen) zu suchen sein. In dieser diagnostischen Situation muss somit der Fehler vor dem Hintergrund des Individuums „Schülerin bzw. Schüler“ nicht nur unter Gesichtspunkten des fachlichen Wissens, sondern unter fachübergreifenden Aspekten betrachtet werden, um im

Unterricht entsprechende Förderprozesse bzw. weitere diagnostische Prozesse anleiten zu können.

#### 2.4.1 Pädagogisch-psychologische Bezüge des diagnostischen Wissens im Kontext Symmetrie und Achsenspiegelung

*Pädagogisch-psychologisches Wissen* ist auch in fachspezifischen Kontexten von Bedeutung. Dazu muss dieses Wissen auf den fachspezifischen Kontext angewandt und zur Diagnostik herangezogen werden. Pädagogisch-psychologisches Wissen, das im fachspezifischen Kontext Symmetrie und Achsenspiegelung benötigt wird, dient insbesondere der Abklärung von Lernvoraussetzungen und Lernvorgängen bzw. es trägt dazu bei, pädagogisch fachdidaktische Entscheidungen im Unterricht zu treffen (vgl. Abbildung 2).

Folgende Inhalte pädagogisch-psychologischen Wissens werden für die Mathematikleistung im Allgemeinen und im Speziellen für die Leistung im Inhaltsbereich Symmetrie und Achsenspiegelung als relevant betrachtet:

- **Wissen zur kognitiven Entwicklung.** Das Wissen zur kognitiven Entwicklung in der frühen und mittleren Kindheit ist bedeutendes Wissen für Grundschullehrkräfte, um allgemeine wie auch fachspezifische Lernvoraussetzungen und Lernvorgänge der Schülerinnen und Schüler besser einschätzen zu können. Zwei der theoretischen Grundlagen sollen im Folgenden kurz erläutert und deren Bedeutung für den Geometrieunterricht hervorgehoben werden. Nach der *Theorie der kognitiven Entwicklung* (Piaget & Inhelder 1971, 1972; vgl. auch zur Oeveste 1987) entstehen kognitive Strukturen aus dem Ergebnis der Interaktion von Assimilation und Akkommodation, wodurch sich das Gehirn entwickelt und fortwährend neue Erfahrungen macht. Dabei durchläuft das Kind vier Entwicklungsstufen: Die sensu-motorische, die präoperationale, die konkret-operationale und die formal-operationale Stufe bzw. Phase. Jede dieser Entwicklungsstufen ist gekennzeichnet durch eine qualitativ andere Art des Denkens. Im Grundschulalter (frühe und mittlere Kindheit) spielen insbesondere zwei Phasen eine Rolle: Mit Eintritt in die Grundschule befinden sich die Kinder auf der Stufe des präoperationalen Denkens, welches durch symbolisches, aber noch nicht formal-logisches Denken gekennzeichnet ist. Im Laufe der ersten Schuljahre findet eine Entwicklung hin zu einem besser organisierten, strukturierteren Denken statt (konkret-operationale Phase). Die formal-operationale Phase wird meist in der Grundschule nicht erreicht. Wissen um die Stufen der kognitiven Entwicklung ist bei Begriffsbildungsprozessen im Bereich der Symmetrie

und Achsenspiegelung ist hilfreich bei der Interpretation von Fehlern der Schülerinnen und Schüler. Treten Fehler oder Verständnisschwierigkeiten systematisch bei allen Schülerinnen und Schülern einer Klasse auf, so kann der Fehler eines Kindes unter Umständen nicht allein auf das inhaltliche Verständnis, sondern auch auf die allgemeine kognitive Entwicklung der Schülerinnen und Schüler einer Jahrgangsstufe zurückzuführen sein.

Neuere *theoretische Ansätze der Informationsverarbeitung* betrachten den menschlichen Verstand als ein System, durch das Information fließt und das Symbole organisiert und reorganisiert (Munakata 2006). Anders als bei Piaget, der sich auf eine Gesamtveränderung der Kognition im Sinne von Stufen konzentrierte, beschreibt der Informationsverarbeitungsansatz voneinander getrennte Aspekte des Denkens. Diese durchlaufen – jeder für sich – eine kontinuierliche Entwicklung und Verbesserung. Dazu zählen Aspekte der Wahrnehmung (auch Aufmerksamkeit), der Gedächtnisleistung (Kurzzeit-, Langzeit- und Arbeitsgedächtnis) und Fähigkeiten zur Problemlösung (wie u. a. auch Metakognition). In der frühen und mittleren Kindheit macht die kognitive Entwicklung große Schritte in einigen dieser Aspekte. Darunter fällt insbesondere die Kapazität des Arbeitsgedächtnisses und das bewusste flexiblere Ausrichten der Aufmerksamkeit beispielsweise bei spezifischen Aufgabenstellungen. Jeder dieser Fortschritte trägt in entscheidendem Maße zum Lernen in der Schule bei (für einen Überblick siehe Berk (2020)). Wissen aus theoretischen Ansätzen der Informationsverarbeitung kann helfen, allgemeine Lernschwierigkeiten, die nicht auf das inhaltliche Verständnis der Symmetrie und Achsenspiegelung zurückzuführen sind, aufzudecken und ggf. entsprechende diagnostische Tests (bspw. zur Informationsverarbeitung) durchzuführen.

- **Wissen zur Entwicklung motorischer Fähigkeiten.** Wissen über die Entwicklung der Feinmotorik ist im Geometrieunterricht der Grundschule grundlegendes pädagogisch-psychologisches Wissen. Unter Feinmotorik werden koordinierte und meist kleinräumige Bewegungen einzelner Körperteile, vor allem der Hände verstanden (bspw. Krombholz 1985; für einen Überblick zur motorischen Entwicklung siehe Blischke (2010)). Feinmotorische Fähigkeiten sind insbesondere beim Führen von Mal- und Zeichenwerkzeugen – wie dies auch beim geometrischen Zeichnen der Fall ist – wichtig. Sind diese Fähigkeiten noch nicht ausreichend ausgeprägt, so können möglicherweise fehlerhafte Lösungen oder Ungenauigkeiten entstehen. Dieses Wissen zur Lernausgangslage und zu den Lernvorgängen bezüglich der motorischen Entwicklung ist bei

der Interpretation von Fehlern von Schülerinnen und Schülern wertvoll: Ein Fehler bei der Achsenspiegelung z. B. ist möglicherweise nicht immer auf mangelndes inhaltliches Verständnis der Symmetrie und Achsenspiegelung zurückzuführen, sondern kann auch durch mangelnde feinmotorische Fähigkeiten bedingt sein.

- **Wissen zur Entwicklung der visuellen Wahrnehmung.** Die visuelle Wahrnehmung kann in verschiedene Bereiche aufgegliedert werden. Diese Bereiche stellen nicht zuletzt Vorläuferfertigkeiten bei der Entwicklung der Raumvorstellung dar. Im Unterrichtskontext Symmetrie und Achsenspiegelung lassen sich v.a. zwei Bereiche der visuellen Wahrnehmung als bedeutsam charakterisieren, weshalb sie in diagnostischen Prozessen mitbedacht werden sollten: Die Figur-Grund-Unterscheidung und die visuo-motorische Koordination. Unter der Figur-Grund-Unterscheidung wird die elementare Fähigkeit verstanden, „Figuren vor einem Hintergrund bzw. eingebettete Teilfiguren einer Gesamtfigur zu erkennen“ (Franke & Reinhold 2016, S. 55). Diese Fähigkeit wird sowohl bei der Achsenspiegelung benötigt (bspw., wenn Figuren auf Kästchengitter gegeben sind) als auch bei der Bearbeitung von Aufgaben zum Erkennen von Symmetrie (bspw. bei der Identifikation kongruenter Teilfiguren). Die visuo-motorische Koordination als koordinatives Zusammenspiel zwischen Auge und Hand ist bei vielen Aufgaben im Bereich der Geometrie und insbesondere auch bei der Achsenspiegelung und Symmetrie Voraussetzung, um zeichnerische Aufgabenstellungen korrekt zu lösen (siehe auch feinmotorische Entwicklung).
- **Wissen zur Raumvorstellung.** Wissen zur Raumvorstellung, welches handlungsleitender Diagnostik zuträglich ist, lässt sich in zwei Bereiche einteilen: Wissen um Teilkomponenten der Raumvorstellungen und Wissen um die Entwicklung der Raumvorstellung. Der Einfluss der Raumvorstellung auf die Mathematikleistung von Schülerinnen und Schülern ist in unterschiedlichen Studien erforscht und nachgewiesen worden, wie bspw. der Zusammenhang einzelner Teilkomponenten des räumlichen Vorstellungsvermögens mit der Mathematikleistung (bspw. Klieme 1986; Büchter 2011; Manger & Eikeland 1998). Klieme, Reiss und Heinze (2003) stellten in ihrer Untersuchung räumliche Fähigkeiten von Schülerinnen und Schülern als Prädiktor für geometrische Kompetenzen heraus. Hohe Fähigkeiten in den Teilkomponenten des räumlichen Vorstellungsvermögens „*Visualization*“, „*räumliche Beziehungen*“ oder „*mentale Rotation*“ können beim Lösen von Aufgaben zur Symmetrie und Achsenspiegelung unterstützen. Lehrerinnen und Lehrer benötigen dieses Wissen bei der Interpretation der Lösungen bzw.

der Bearbeitungsprozesse von Aufgaben zum Einzeichnen von Symmetrieachsen oder zur Achsenspiegelung, insbesondere bei der Einordnung von Aufgabenschwierigkeiten. Ist ein Kind bspw. in der Lage, sich den Vorgang des Faltens im Kopf vorzustellen, also sich eine Bewegung vorzustellen bzw. zu visualisieren (vgl. Thurstone 1950; auch Lohman 1979; Maier 1999), so kann es vermutlich leicht herausfinden, wo eine Bildfigur nach der Spiegelung an einer Achse zu liegen hat.

Die Entwicklung räumlicher Fähigkeiten bei Kindern hängt eng mit der Entwicklung geistiger Fähigkeiten zusammen (vgl. Piaget & Inhelder 1971, 1972). Piaget beschreibt die Stufen der Entwicklung des räumlichen Denkens in vier Stufen bzw. Phasen (siehe oben). Räumliche Vorstellungen werden dabei durch konkretes Handeln schrittweise aufgebaut. Im Verlauf dieser kognitiven Entwicklung beim Kind unterscheiden Piaget und Inhelder drei aufeinander aufbauende Formen räumlicher Beziehungen: Topologische, projektive und euklidische Beziehungen (für einen Überblick siehe Franke und Reinhold 2016). Das Wissen um diese Entwicklungsstufen kann für Lehrerinnen und Lehrer eine direkte Handlungsunterstützung darstellen, da Lernvoraussetzungen, Lernvorgänge und Lernergebnisse, wie sie sich beispielsweise in bestimmten Fehlern äußern, vor dem Hintergrund der Fähigkeit zur Raumvorstellung interpretiert werden müssen. Werden gewisse Fehler systematisch in einer Jahrgangsstufe diagnostiziert, so wäre eine mögliche Konsequenz für den Unterricht, beispielsweise Material derart einzusetzen, dass dadurch die Leistungsentwicklung der Schülerinnen und Schüler hin zu einer nächsten Entwicklungsstufe gefördert wird.

In gleicher Weise wie *pädagogisch-psychologisches Wissen* muss auch *fachdidaktisches Wissen* in Diagnoseprozessen herangezogen werden, um fachspezifische Lernvorgänge und Lernergebnisse interpretieren zu können und daraus entsprechende pädagogische bzw. diagnostische Entscheidungen abzuleiten.

#### 2.4.2 Fachdidaktische Bezüge diagnostischen Wissens im Kontext Symmetrie und Achsenspiegelung

Fachdidaktisches Wissen, welches handlungsleitend in diagnostischen Situationen in Bezug auf den Inhaltsbereich Symmetrie und Achsenspiegelung von Bedeutung ist, ist überwiegend Wissen, das hilft, inhaltliche Äußerungen der Schülerinnen und Schüler (wie beispielsweise Fehler) aus fachspezifischer Sicht (vgl. Abbildung 2, S. 32) einzuordnen:

- **Wissen um Fehler bei der Symmetrie und Achsenspiegelung.** Fachdidaktisches Wissen um spezifische Fehler, die bei Aufgaben zur Symmetrie und Achsenspiegelung auftreten (vgl. Abschnitte 3.3.2 und 3.3.3) ist notwendig, um ausgehend von diesen Fehlern den Lernstand einer Schülerin bzw. eines Schülers in den Erwerb des Symmetrieverständnisses einordnen zu können. Im Rahmen (förder-)diagnostischer Maßnahmen können auf Basis dieses Wissens pädagogisch-fachdidaktische Entscheidungen (bspw. das Erstellen neuer Aufgaben) getroffen werden, die zu einer optimierten Passung von Aufgaben und dem Lernstand der Schülerinnen und Schüler führen.
- **Wissen um die Stufen der Entwicklung des Symmetrieverständnisses sowie des Begriffserwerbs** (vgl. Abschnitt 2.3.1.1). Dieses Wissen gibt aus diagnostischer Sicht Auskunft über den Lernstand eines Kindes – insbesondere darüber, auf welcher Stufe des Begriffsverständnisses es sich befindet. Daraus lassen sich individuell angepasste Fördermaßnahmen ableiten. Befindet sich ein Kind bspw. noch auf einer stark handlungsgebundenen Stufe des Symmetrieverständnisses (vgl. Abschnitt 2.3.1.1), so bietet es sich an, pädagogische bzw. diagnostische Maßnahmen dementsprechend anzupassen und ausgehend vom aktuellen Lernstand des Kindes, zunächst einmal über zeichnerisch-kinematische Zugänge die Loslösung von Handlungen anzubahnen.
- **Wissen um Aufgabenmerkmale und -schwierigkeiten in den Bereichen Symmetrie und Achsenspiegelung** (vgl. Abschnitte 2.3.2 und 2.3.3). Lernergebnisse, wie bspw. Fehler bei der Achsenspiegelung, können mit Hilfe präzisen Wissens zu Aufgabenmerkmalen und -schwierigkeiten identifiziert und interpretiert werden. Ebenso ist dieses Wissen elementar, um bspw. im Rahmen fachdidaktischer Entscheidungen Testaufgaben gezielt auszuwählen und in ihrem Schwierigkeitsgrad zu variieren. Auf diese Weise können Aussagen zum individuellen Leistungsstand getroffen werden und darauf aufbauend differenzierte Fördermaßnahmen eingeleitet werden.
- **Wissen um Strategien bei der Lösung von Aufgaben mit räumlichem Gehalt** (vgl. Abschnitt 2.3.4). Strategien beschreiben Lernvorgänge bzw. Lösungsprozesse von Schülerinnen und Schülern. Sie sind inter- und intraindividuell unterschiedlich und können je nach Anforderungssituation variieren (u. a. Putz-Osterloh 1977; Köller, Rost & Köller 1994; Schultz 1991; für einen Überblick siehe Grüßing (2012)). Fachdidaktisches Wissen zu Strategien kann zu diagnostischen Zwecken genutzt werden: Die Analyse, der von den Schülerinnen und Schülern angewandten Strategien, kann eine Erklärung

für einen Fehler geben oder Rückschlüsse auf möglicherweise wenig tragfähige Lösungsstrategien bei der Aufgabenbearbeitung erlauben.

- **Wissen zum Einsatz von Arbeitsmitteln.** Die Arbeit mit räumlich-geometrischen Aufgabenstellungen – wie es auch Aufgaben aus dem Inhaltsbereich Symmetrie und Achsenspiegelung sind – erfordert immer einen hohen Grad der Aktivierung mentaler Bilder. Tätigkeiten an Arbeitsmitteln dienen der Verinnerlichung von Handlungen (Piaget & Inhelder 1971) und tragen so zur Entwicklung räumlicher Fähigkeiten bei. Arbeitsmitteln kommt bei der Erarbeitung eines Symmetrieverständnisses eine entscheidende Rolle zu (vgl. Abschnitt 2.3.1.2). Wissen um geeignete Arbeitsmittel und Materialien, die bei der Erarbeitung des Symmetriebegriffes eingesetzt werden können (Faltschnitte, Geobretter, Klecksbilder etc.) ist somit wichtig, um angemessene (Förder-) Maßnahmen auszuwählen.

Die beschriebenen Inhalte fachübergreifender und fachspezifischer Facetten professionellen Wissens tragen dazu bei, Wissen über das mathematische Denken, die Lernfortschritte und die Einschätzung von Lernschwierigkeiten bzw. Fehler der Schülerinnen und Schüler zu erkennen und zu erfassen. Informationen zum Denken einzelner Schülerinnen und Schüler lassen wiederum eine differenzierte Diagnostik bezogen auf die Leistungsentwicklung des Individuums „Schülerin bzw. Schüler“ zu (vgl. Baumert & Kunter 2011; Shulman 1987; vgl. auch Schrader 2013).

#### 2.4.3 Curriculare Bezüge zum diagnostischen Wissen im Kontext Symmetrie und Achsenspiegelung

*Curriculares Wissen* weist ebenso einen fachspezifischen Bezug zum diagnostischen Wissen auf. Das curriculare Wissen spielt weniger bei der Analyse dessen, was Schülerinnen und Schüler bereits können (Ist-Zustand) eine Rolle, vielmehr orientiert sich der Soll-Zustand an curricularen Vorgaben (vgl. Abbildung 2, S. 32). Der Soll-Zustand, also das fachliche Lernziel, an dem sich pädagogisch-fachdidaktische, diagnostische Leistungen orientieren, wird definiert durch curriculare Vorgaben wie den Inhalten der Kerncurricula und Bildungsstandards (vgl. Unterkapitel 2.1). Geht es darum, passgenaue diagnostische Entscheidungen zu treffen, so ist auf Seite der Lehrerinnen und Lehrer curriculares Wissen im Inhaltsbereich Symmetrie und Achsenspiegelung notwendig. Über die Einordnung der Lernausgangslage in Bezug auf fachliche Lernziele im Bereich Symmetrie und Achsenspiegelung können im Sinne eines nächsten Entwicklungsschrittes entsprechende pädagogische Maßnahmen ergriffen werden.

Bezogen auf Fehler bei der Achsenspiegelung in Jahrgangsstufe 3 bedeutet dies, dass die Lehrkraft den Fehler der Schülerin bzw. des Schülers in Bezug dazu setzen muss, was die Schülerin bzw. der Schüler am Ende der Jahrgangsstufe 4 an Kompetenzen erreichen sollte (vgl. bspw. Bildungsstandards). Dieses Wissen muss dann genutzt werden, um fachdidaktisch angemessene diagnostische Maßnahmen zu ergreifen vor dem Hintergrund, das Können des Individuums „Schülerin bzw. Schüler“ mit den Zielvorgaben ein Einklang zu bringen.

Aus diesem Abschnitt wird deutlich, in welchem Umfang diagnostisches Wissen facettenübergreifend zu verorten ist und, dass weder allgemein-pädagogisches noch fachspezifisches Wissen allein ausreicht, um passgenaue Entscheidungen zu treffen (vgl. auch Abbildung 2, S. 32). Auf die Schülerinnen und Schüler passgenau abgestimmte pädagogische und fachdidaktische Entscheidungen, die zu einem anschlussfähigen Unterrichten von Achsenspiegelung und Symmetrie führen, können nur getroffen werden, wenn Wissen verschiedener Facetten professionellen Wissens miteinander verknüpft wird und bei der Beurteilung des Individuums ineinandergreift bzw. abgewägt wird.

### 3 Forschungsdesiderate bezüglich des inhaltsspezifischen professionellen Wissens von Lehrkräften zu Symmetrie und Achsenspiegelung im Unterricht der Grundschule

Die bisherigen Kapitel dieser Arbeit dienten dem Zweck, wichtige Facetten professionellen Wissens von Lehrkräften im Zusammenhang mit dem fachspezifischen Unterrichten herauszuarbeiten und für den Inhaltsbereich Symmetrie und Achsenspiegelung in der Grundschule zu präzisieren. Abbildung 1 (S. 18) verdeutlicht grafisch die Vielschichtigkeit der inhaltsspezifischen Wissensgrundlagen für das Unterrichten. Erkenntnisse, auf die Lehrerinnen und Lehrer zurückgreifen können, um den Inhaltsbereich Symmetrie und Achsenspiegelung anschlussfähig zu unterrichten und mathematikdidaktisch wertvolle Entscheidungen zu treffen bzw. Handlungen durchzuführen, sind in Ansätzen bereits vorhanden. Dennoch sind die Erkenntnisse zu einzelnen Wissensfacetten nicht immer grundschulspezifisch ausdifferenziert und allgemein noch zu wenig präzise. Darüber hinaus sind die Ergebnisse einzelner Studien noch zu wenig belastbar. Aus diesem Grund befasst sich vorliegende Arbeit zentral mit der Frage, welches Wissen auf Seiten der Lehrkräfte notwendig ist, um in der Grundschule Unterricht durchzuführen, der den Lernerfolg der Schülerinnen und Schüler im Inhaltsbereich Symmetrie und Achsenspiegelung positiv beeinflusst.

#### 3.1 Curriculares Wissen

Wissen, über das Lehrerinnen und Lehrer in den einzelnen Facetten professionellen Wissens verfügen, ist handlungsleitend für Unterrichtsprozesse. Dabei dient *curriculares Wissen* als wichtige Wissensgrundlage zur Bestimmung des Erwartungshorizonts und der Lernziele innerhalb des Inhaltsbereiches (vgl. Abschnitt 1.2.4). Des Weiteren ist dieses Wissen grundlegend, um im Unterricht der Grundschule die Lernausgangslage (als Wissen um vorhergegangene Lernprozesse) einschätzen zu können. Außerdem dient curriculares Wissen der anschlussfähigen Gestaltung des Wissenserwerbs eines Inhaltsbereich im Hinblick auf nachfolgende Klassenstufen (innerhalb der Grundschule oder der Sekundarstufe) (vgl. Unterkapitel 2.1). Curriculares Wissen wird im Rahmen von Bildungsstandards und Kerncurricula formuliert: Diese legen fest, welche Kompetenzen am Ende der jeweiligen Jahrgangsstufen bzw. Bildungsgänge erreicht werden sollen.

### **Forschungsdesiderat 1**

Die Anschlussfähigkeit des in der Grundschule erworbenen Wissens ist eines der Kernanliegen der Mathematikdidaktik – sowohl in der Ausbildung von Lehrerinnen und Lehrern als auch in der mathematikdidaktischen Forschung. Um im Geometrieunterricht der Grundschule die Themen Symmetrie und Achsenspiegelung anschlussfähig unterrichten zu können, werden wissenschaftlich fundierte Erkenntnisse zum curricularen Aufbau von Inhalten benötigt.

## 3.2 Fachliches Wissen

Ebenso wie curriculares Wissen, ist auch *fachliches Wissen* von Lehrkräften Wissensgrundlage für das Unterrichten der Inhalte Symmetrie und Achsenspiegelung, um im Unterricht sinnvolle didaktische Entscheidungen zu treffen. Insbesondere der Zusammenhang der Achsenspiegelung mit verschiedenen Kongruenzabbildungen der Ebene (vgl. Abschnitt 2.2.2) ist eine wichtige Wissensgrundlage, die für das Unterrichten in der Grundschule sowie in den weiterführenden Schulen von Bedeutung ist. Dieses Wissen wird überwiegend im Ausbildungsgang an der Universität erworben. Fachliche Inhalte der Geometrie werden dabei in der Regel in den fachmathematischen Vorlesungen und Seminaren des jeweiligen Studiengangs vermittelt und variieren von Universität zu Universität. Diese fachmathematischen Veranstaltungen sind oft nicht nur für Studierende des Lehramts an Grundschulen, sondern auch für Studierende anderer Lehrämter oder für Studierende der Fachmathematik geöffnet. Konkrete Verknüpfungen der fachmathematisch-geometrischen Grundlagen mit der Geometriedidaktik bzw. mit konkreten geometrischen Inhalten der Grundschule oder der Sekundarstufe I werden oftmals nicht ausreichend explizit angesprochen.

### **Forschungsdesiderat 2**

Die Ausbildung von Grundschullehrerinnen und -lehrern beinhaltet in der Regel fachmathematische und mathematikdidaktische Inhalte. Mathematische Inhalte werden dabei häufig in fachmathematischen Veranstaltungen vermittelt. Es werden Erkenntnisse dazu benötigt, wie die für das Unterrichten notwendigen fachlich-geometrischen Inhalte mit geometriedidaktischen Inhalten in der Ausbildung von Grundschullehrkräften sinnvoll verknüpft werden können, um Lehrkräften eine Basis für kompetentes unterrichtliches Handeln zu liefern.

### 3.3 Fachdidaktisches Wissen

Als zentrale Wissensfacette wurde das fachdidaktische Wissen herausgearbeitet. Bereits vorhandene Wissensgrundlagen fachdidaktischen Wissens mit dem Fokus auf Symmetrie und Achsenspiegelung wurden in Unterkapitel 2.3 detailliert dargestellt. Dieses vorhandene fachdidaktische Wissen ist nicht immer grundschulspezifisch: Während hingegen Wissen zur Sequenzierung der Unterrichtsinhalte (u. a. zu den Stufen des Begriffsverständnisses) detailliert vorhanden ist, liegt Wissen zu Aufgabenspezifika im Gegensatz dazu in der Grundschule und deren Schwierigkeiten nur vereinzelt vor.

Zur Auswahl bestimmter Aufgaben und deren Einsatz im Unterricht ist zum einen fachdidaktisches Wissen zu spezifischen Aufgabenmerkmalen sowie auch zu möglichen Fehlern, die bei diesen Aufgaben auftreten, notwendig. Studien zu schwierigkeitsgenerierenden Merkmalen bei der Achsenspiegelung wurden überwiegend im Bereich der Sekundarstufe I (Schülerinnen und Schüler im Alter von 11 bis 15 Jahren) durchgeführt (Küchemann 1981; Grenier 1985a, 1985b). Studien im Vor- und Grundschulalter fokussieren überwiegend Achsenspiegelungen, bei denen eine Figur zu einer achsensymmetrischen Figur ergänzt werden soll, nicht jedoch Achsenspiegelungen, die zu zwei kongruenten Figuren führen (Schmidt 1986; Höglinger & Senftleben 1997; Genkins 1978). Die genannten Studien, die Achsenspiegelungen fokussieren, die zu zwei kongruenten Figuren führen, beinhalteten überwiegend die Spiegelung von Punkten, Strecken und Fahnen, nicht jedoch von geschlossenen Figuren, wie es die Curricula der Primarstufe vorsehen. Erste Rückschlüsse auf schwierigkeitsgenerierende Merkmale von Aufgaben in der Grundschule können aus diesen Ergebnissen gewonnen werden, doch liegt dieses Wissen nicht systematisch vor und dient somit bislang nur sehr eingeschränkt als fachdidaktische Wissensgrundlage für Grundschullehrkräfte.

#### **Forschungsdiesiderat 3**

Wissen um Aufgabenmerkmale ist elementar, um ein anschlussfähiges Verständnis von Achsenspiegelung im Geometrieunterricht der Grundschule aufzubauen. Ein Anliegen muss es sein, systematisches fachdidaktisches Wissen zu schwierigkeitsgenerierenden Merkmalen von geschlossenen Figuren (Untergrund, Figurenmerkmale, Lage zur Achse, ...) und deren Ausprägungen zu generieren, um diese Anschlussfähigkeit zu gewährleisten.

Wissen, das zu Fehlern bei der Achsenspiegelung von Schülerinnen und Schülern im Grundschulalter vorliegt, bezieht sich überwiegend auf Erkenntnisse zu Fehlern beim Vervollständigen von der Achse anliegenden Figuren (Höglinger & Senftleben 1997). Bisherige Studien zu typischen Fehlern von Schülerinnen und Schülern bei Achsenspiegelungen, die zu zwei kongruenten Figuren führen, identifizieren typische Fehler im Alter von 11 bis 15 Jahren (Küchemann 1981; Grenier 1985a, 1985b; Denys & Grenier 1986; Lima 2006). Es ist jedoch nicht empirisch erwiesen, dass dieses Wissen über Fehler auf Schülerinnen und Schüler der Grundschule übertragen werden kann.

#### **Forschungsdesiderat 4**

Fehler sind eines der zentralen Diagnoseinstrumente für Lehrkräfte, um Rückschlüsse auf Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler zu ziehen und entsprechende pädagogisch-fachdidaktische Maßnahmen abzuleiten. Ein weiteres Anliegen der Fachdidaktik muss es daher sein, Wissen über mögliche typische Fehler bei Achsenspiegelungen zu schaffen, um diese bei der Unterrichtsplanung, -gestaltung und -evaluation zu berücksichtigen und bei der Diagnostik des Lernstandes einordnen zu können.

Die Erarbeitung eines Symmetrieverständnisses erfolgt durch Aufgaben zur Achsenspiegelung und durch Aufgaben zur Achsensymmetrie. Neben fachdidaktischem Wissen zu schwierigkeitsgenerierenden Merkmalen bei Aufgaben zur Achsenspiegelung ist auch Wissen um Merkmale von Aufgaben notwendig, welche einen Einfluss auf das Erkennen der Eigenschaft der Achsensymmetrie bzw. auf das Einzeichnen von Symmetrieachsen haben. Bisherige Studien liefern Hinweise auf Merkmale von Aufgaben, die das Erkennen einer Figur als achsensymmetrisch bzw. das Einzeichnen von Symmetrieachsen beeinflussen. Die Ausrichtung der Symmetrieachse ist eines der Aufgabenmerkmale, welches als umfassend empirisch untersucht bezeichnet werden kann (Bornstein et al. 1981; Fisher et al. 1981; Bornstein & Stiles-Davis 1984). Inwieweit hingegen weitere Aufgabenmerkmale (wie bspw. die Symmetrie der Figur, die Anzahl der Symmetrieachsen, etc.), die Bearbeitung von Aufgaben zum Erkennen von Achsensymmetrie bzw. zum Einzeichnen von Symmetrieachsen beeinflussen, ist bisher noch nicht wissenschaftlich belegt (vgl. Xistouri 2007; Genkins 1978; Schmidt 1986; Grohe 2011). Ebenso steht nur wenig fachdidaktisches Wissen zu typischen Fehlern bei Aufgaben zum Erkennen von Achsensymmetrie und dem Einzeichnen von Symmetrieachsen zur Verfügung. Erste Erkenntnisse lassen vermuten, dass es typische Fehler

gibt, die häufiger auftreten als andere. Darunter fallen beispielsweise das Identifizieren einer punktsymmetrischen Figur als achsensymmetrisch oder das Einzeichnen der Diagonalen oder der Parallelen durch die Seitenmitten bei punktsymmetrischen Figuren (Genkins 1978; Schmidt 1986; Grohe 2011).

### **Forschungsdesiderat 5**

Die Auswahl geeigneter Aufgabenstellungen für den Erwerb eines Symmetrieverständnisses kann nicht willkürlich geschehen, sondern muss sich auf Wissen über Schwierigkeiten und Besonderheiten von Aufgaben zum Erkennen von Achsensymmetrie bzw. zum Einzeichnen von Symmetrieachsen stützen. Fachdidaktisches Wissen zum Einfluss von Aufgabenmerkmalen auf das Erkennen von Achsensymmetrie bzw. das Einzeichnen von Symmetrieachsen in ebene Figuren in der Grundschule sowie zu typischen Fehlern, ist dazu notwendig.

## 3.4 Diagnostisches Wissen

Ein Teil des fachdidaktischen Wissens, das gleichermaßen eine Grundlage für diagnostische Leistungen darstellt, ist das Wissen um das Denken der Schülerinnen und Schüler (siehe Unterkapitel 2.4; vgl. auch Baumert & Kunter 2011). Wissen über das mathematische Denken von Schülerinnen und Schülern ist im Unterricht von großer Bedeutung, um Lernprozesse anzuleiten, Material entsprechend einzusetzen und Fehlvorstellungen vorzubeugen. Informationen zum Denken der Schülerinnen und Schüler können insbesondere aus dem Beobachten der Kinder in den entsprechenden Unterrichtssituationen gewonnen werden. Aus bisherigen Studien können bereits erste Vermutungen auf das mathematische Denken der Schülerinnen und Schüler bezüglich der Achsensymmetrie und Achsenspiegelung angestellt werden. Zum einen geben Studien zu Strategien von Schülerinnen und Schülern beim Lösen raumgeometrischer Aufgaben erste Hinweise auf individuelle Unterschiede im Denken der Schülerinnen und Schüler (vgl. Abschnitt 2.3.4). Zum anderen ist fachdidaktisches Wissen zu bestimmten Fehlern und Fehlvorstellungen bezogen auf Symmetrie und Achsenspiegelung Grundlage, um diagnostische Handlungen zu ermöglichen (vgl. Abschnitt 1.2.4). Erkenntnisse zu Fehlvorstellungen werden am Rande einiger Forschungsarbeiten thematisiert. Darunter fallen beispielsweise das Ergänzen der Figur dem Weltwissen entsprechend (Höglinger & Senftleben 1994), die Spiegelung der Figur „auf die andere Seite“ (Küchemann 1981; Ramful et al. 2015) und die Verlängerung eines Objektes über die Achse hinweg (Grenier 1985a; Küchemann 1981). Diese

Fehlvorstellungen zeigten sich überwiegend in Studien mit älteren Schülerinnen und Schülern.

### **Forschungsdesiderat 6**

Diagnostische Leistungen durch Lehrkräfte im Unterricht basieren auf dem Wissen um das Denken der Schülerinnen und Schüler (bspw. der Abklärung von Lernvoraussetzungen, Lernvorgängen, etc.). Detaillierteres Wissen über das Denken von Schülerinnen und Schülern der Grundschule während des Lösens von Aufgaben zu Symmetrie und Achsenspiegelung ist notwendig, insbesondere, um auftretende Fehler nachvollziehen zu können und gezielte, an das Individuum angepasste, diagnostische Maßnahmen zu ergreifen.

Ausgehend von Wissen über Fehler und Fehlvorstellungen der Schülerinnen und Schüler stellt sich für die Unterrichtspraxis die Frage, wie – basierend auf diesem Wissen – ein konstruktiver Begriffserwerb erfolgen kann. In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage, welches didaktische Material und welche Aufgaben geeignet sind, um die Schülerinnen und Schüler entsprechend ihrem Lernstand – also auch ihrer Fehler und Fehlvorstellungen entsprechend – zu fördern.

### **Forschungsdesiderat 7**

Der Aufbau geometrischen Wissens erfolgt fortschreitend durch die Verinnerlichung von Handlungen (am Material) und die Entwicklung mentaler Bilder dieser Objekte. Ein adäquater Materialeinsatz, um Fehlern bzw. Fehlvorstellungen vorzubeugen bzw. ihnen entgegenzuwirken, kann als zentrales Handlungsziel des Geometrieunterrichts in der Grundschule gesehen werden. Gezieltes Wissen darum, welches Material sich auf welche Art und Weise mit welchem Ziel einsetzen lässt, ist mathematikdidaktisch noch nicht hinreichend erforscht.

Wissen zu grundschulspezifischen Aufgabenschwierigkeiten, zu Fehlern und zu Fehlvorstellungen bei der Erarbeitung der Inhalte Symmetrie und Achsenspiegelung ist für Grundschullehrerinnen und -lehrer elementar, um anschlussfähig und verständnisorientiert zu unterrichten. Die hier vorliegende Arbeit nimmt sich zum Ziel, eine Wissensgrundlage zu schaffen, die dazu beiträgt, dieses lückenhafte grundschulspezifische Wissen, das beim Unterrichten der Inhalte Symmetrie und Achsenspiegelung als Teil des professionellen Wissens von Grundschullehrkräften gelten muss, zu präzisieren.

## 4 Forschungsschwerpunkte

Im Rahmen dieser Arbeit erfolgt eine Schwerpunktsetzung bezüglich der in Kapitel 4 aufgezeigten Forschungsdesiderate. Detaillierte Ausführungen zu den im Folgenden genannten Forschungsschwerpunkten dieser Arbeit finden sich in den bereits publizierten Artikeln und werden im folgenden Kapitel lediglich kurz beschrieben.

### 4.1 Forschungsschwerpunkt 1: Wissen zu Aufgabenmerkmalen im Bereich Symmetrie und Achsenspiegelung

Im Rahmen dieses Forschungsschwerpunktes hinsichtlich des Wissens zu Aufgabenmerkmalen im Bereich Symmetrie und Achsenspiegelung werden überwiegend die Forschungsdesiderate 3, 4 und 5 adressiert.

#### 4.1.1 Merkmale von Aufgaben zur Achsenspiegelung und deren Ausprägungen

##### **Anforderungen bei der Achsenspiegelung – Ein empirisch gestütztes Kategorienschema**

Götz, D., & Gasteiger, H. (2019), *Journal für Mathematik-Didaktik*, 40(2), 289–322.

Die aus den bisherigen Studien bekannten Merkmale, welche die Schwierigkeit von Aufgaben zur Achsenspiegelung beeinflussen, waren eher punktuell und erlaubten keine systematischen Aussagen zu einer Abstufung einzelner Schwierigkeiten bei grundschulspezifischen Aufgaben zur Achsenspiegelung. Mit dem Ziel, Anforderungen von Aufgaben zur Achsenspiegelung im Unterricht der Grundschule zu identifizieren und zu präzisieren, wurden in dieser Studie folgende Forschungsfragen formuliert (überwiegend Forschungsdesiderat 3):

- (1) Welche Aufgabenmerkmale sind bei der Achsenspiegelung von Figuren (über die bereits bekannten Merkmale hinaus) schwierigkeitsgenerierend?
- (2) Welche Ausprägungen der einzelnen schwierigkeitsgenerierenden Merkmale stellen eine hohe bzw. niedrige Anforderung bei der Achsenspiegelung dar?
- (3) Inwiefern lassen sich die schwierigkeitsgenerierenden Merkmale bei der Achsenspiegelung im Sinne eines Kategorienschemas systematisch beschreiben und verallgemeinern?

Um eine systematische Aufgabenanalyse durchzuführen, wurde eine Stichprobe aus Erprobungsstudien der bundesweiten Vergleichsarbeiten<sup>20</sup> in Jahrgangsstufe 3 genutzt. Die Basis der fundierten inhaltlichen Analyse schwierigkeitsgenerierender Merkmale bilden 37 raschskalierte Aufgaben zur Achsenspiegelung mit jeweils ca. 250 Bearbeitungen pro Aufgabe. Psychometrisch erfasste Aufgabenschwierigkeiten in Form von Kompetenzstufen und Punktwerten auf der Skala der Bildungsstandards dienten als Ausgangspunkt für die qualitativen Analysen dieser Studie. Durch den Vergleich gezielt zusammengestellter Aufgabenpaare (welche nur in dem interessierenden Merkmal variierten) in Kombination mit theoretisch belegten Aufgabenmerkmalen, konnten Rückschlüsse auf weitere schwierigkeitsbeeinflussende Aufgabenmerkmale gezogen werden.

#### 4.1.2 Merkmale von Aufgaben zur Achsenspiegelung und deren Spezifika beim unterrichtlichen Einsatz

**Die Rolle spezifischer Merkmale von Aufgaben zur Achsenspiegelung unter Berücksichtigung didaktischer und diagnostischer Aspekte**

Götz, D. (2020), *Der Mathematikunterricht*, 66(6), 4–11.

Aufbauend auf den Erkenntnissen des Artikels unter Abschnitt 4.1.1 analysiert dieser unterrichtspraktisch orientierte Artikel typische Fehler von Schülerinnen und Schülern der Grundschule und vergleicht diese mit Fehlern von Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I, die bei ähnlichen Aufgaben auftreten (vgl. Forschungsdesiderat 4). Es werden Annahmen über mögliche Zusammenhänge von Fehlvorstellungen der Schülerinnen und Schüler mit typischen Fehlern getroffen.

Aus unterrichtspraktischer Sicht zeigt dieser Beitrag auf, wie die Komplexität einer Aufgabe durch die Veränderung einzelner Aufgabenmerkmale von sehr leicht bis schwer variiert und somit an die Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler angepasst werden kann. Dabei wird exemplarisch geschildert, welche Rolle das generierte Wissen um schwierigkeitsgenerierende Aufgabenmerkmale bei der Achsenspiegelung konkret im Unterricht spielt.

---

<sup>20</sup> Durchgeführt durch das Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB).

#### 4.1.3 Merkmale von Aufgaben im Inhaltsbereich Symmetrie

##### **Einfluss von Merkmalen ebener Figuren auf das Erkennen von Achsensymmetrie – Eine Analyse von Aufgabenlösungen**

Götz, D., Gasteiger, H., & Kühnhenrich, M. (2020), *Journal für Mathematik-Didaktik*, 41(2), 523–554.

Dieser Artikel fokussiert Merkmale von Aufgaben zum Erkennen von Achsensymmetrie und zum Einzeichnen von Symmetrieachsen (vgl. Forschungsdesiderat 5). In dieser Studie wurde der Einfluss der Merkmale einer Figur (z. B. Ausrichtung der Achse, Art der Symmetrie) auf die Häufigkeit, mit der achsensymmetrische von nicht-achsensymmetrischen Figuren unterschieden werden und Symmetrieachsen richtig eingezeichnet werden, analysiert.

Folgende Forschungsfragen wurden in dieser Studie gestellt:

- (1) Inwiefern beeinflussen die *Ausrichtung der Achse*, die *Art der Symmetrie der Figur* und die *Anzahl der Symmetrieachsen einer Figur* die Fähigkeit von Schülerinnen und Schülern achsensymmetrische von nicht-achsensymmetrischen Figuren zu unterscheiden und die Symmetrieachsen richtig einzuzeichnen?
- (2) Welche Fehler treten beim Einzeichnen von Symmetrieachsen unter Berücksichtigung unterschiedlicher Aufgabenmerkmale auf und zeigen sich dabei spezifische Fehlertypen?

Basis für das Herausarbeiten typischer Fehler unter Berücksichtigung unterschiedlicher Aufgabenmerkmale ist ein Aufgabenpool von 18 Aufgaben zum Identifizieren und Einzeichnen von Symmetrieachsen. Die Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 3 (n=212) bearbeiteten diese Aufgaben zum Erkennen einer Figur als achsensymmetrisch und zeichneten – falls gegeben – Symmetrieachsen ein. Die verwendeten Figuren wurden systematisch konzipiert. Das Testheft enthielt zum einen achsensymmetrische Figuren: rein achsensymmetrische Figuren, achsensymmetrische Schubfiguren, achsen- *und* punktsymmetrische Figuren, achsen- *und* drehsymmetrische Figuren sowie achsen-, punkt- *und* drehsymmetrische Figuren. Zum anderen enthielt das Testheft Figuren, die nicht achsensymmetrisch sind: punktsymmetrische Figuren, drehsymmetrische (aber nicht punktsymmetrische Figuren) sowie Schubfiguren.<sup>21</sup>

---

<sup>21</sup> Für eine genaue Beschreibung und Erläuterung der Auswahl der Aufgaben siehe Götz und Gasteiger (2020).

Die an diesen Figuren durchgeführten systematischen Fehleranalysen liefern eine erste Datenbasis, aus der sich – über aufgetretene Fehler – Rückschlüsse auf das Symmetrieverständnis ziehen lassen.

## 4.2 Forschungsschwerpunkt 2: Wissen über das mathematische Denken von Schülerinnen und Schülern bei der Achsenspiegelung

Im Rahmen dieses Forschungsschwerpunktes zum Wissen über das mathematische Denken von Schülerinnen und Schülern bei der Achsenspiegelung werden überwiegend die Forschungsdesiderate 6 und 7 adressiert.

### 4.2.1 Kriterien, die Grundschul Kinder bei der Spiegelung ebener Figuren heranziehen

**Reflecting geometrical shapes: approaches of primary students to reflection tasks and relations to typical error patterns**

Götz, D., & Gasteiger, H. (2022), *Educational Studies in Mathematics*

In der im Folgenden beschriebenen Studie steht insbesondere Forschungsdesiderat 6 im Vordergrund. Detaillierteres Wissen über das Denken von Schülerinnen und Schülern der Grundschule während des Lösens von Aufgaben zu Symmetrie und Achsenspiegelung ist notwendig, insbesondere um auftretende Fehler nachvollziehen zu können. Probleme, die beim Lösen von Aufgaben an schrägen Achsen immer wieder auftreten, sind bekannt. Bisherige Untersuchungen fokussierten jedoch überwiegend Aufgabenschwierigkeiten und Ergebnisse bzw. Fehler der Schülerinnen und Schüler bei der Achsenspiegelung. Wenig ist bisher über das Denken und damit verbundene Handlungen der Schülerinnen und Schüler bekannt, die hinter unterschiedlichen Fehlern bei der Achsenspiegelung stehen. Um dieser Frage nachzugehen, wurden in dieser Studie Äußerungen der Schülerinnen und Schüler (mündlich oder gestisch) während ihrer Lösungsprozesse bei Aufgaben zur Achsenspiegelung beobachtet und analysiert. In dieser Studie wurden diesbezüglich folgende Forschungsfragen formuliert:

- (1) Welche Ansätze oder Strategien verwenden Grundschülerinnen und -schüler bei der Lösung von Aufgaben zur Achsenspiegelung?
- (2) Inwieweit hängen die Lösungsprodukte der Schülerinnen und Schüler mit den Ansätzen und Strategien zusammen, die sie beim Lösen von Aufgaben zur Achsenspiegelung verwenden?

Diese Studie wurde als Interviewstudie mit 42 Schülerinnen und Schülern zum Ende der Grundschulzeit in Deutschland durchgeführt. In einem aufgabenbasierten Interview wurden vier Aufgaben zur Achsenspiegelung bearbeitet. Dabei kamen sowohl die Methode des Lauten Denkens als auch ein halbstrukturierter Interviewleitfaden zum Einsatz. Zur Analyse der Interviews wurde mittels qualitativer Inhaltsanalyse ein Kategoriensystem entwickelt, validiert und auf den Datensatz angewandt. Die Kodierung der Aufgabenbearbeitungen erfolgte auf unterschiedlichen Ebenen. Alle Lösungen der Schülerinnen und Schüler wurden zum einen dichotom (richtig/falsch) und zum anderen qualitativ inhaltlich – orientiert an typischen Fehlern – kodiert. Im Anschluss daran wurden die transkribierten Interviews mittels des Kategoriensystems bezüglich der Kriterien des Denkens und Handelns ausgewertet. Dabei wurden die Kategorien "Eigenschaften der Achsenspiegelung", "ganzheitliche Herangehensweisen", "Gesten und Handlungen, die den Prozess der Spiegelung veranschaulichen" und "mentale Bilder, die den Prozess der Spiegelung veranschaulichen" mit jeweils entsprechenden Unterkategorien kodiert.

## 5 Zusammenfassung der Ergebnisse

In den folgenden Abschnitten werden die Ergebnisse der Studien zu den jeweiligen Forschungsschwerpunkten (siehe Kapitel 4) berichtet, wobei zunächst die Erkenntnisse zu Wissen zu Aufgabenmerkmalen im Bereich Symmetrie und Achsenspiegelung zusammengetragen werden (Unterkapitel 5.1). Daran anschließend werden die Ergebnisse zum Wissen über das mathematische Denken von Schülerinnen und Schülern bei der Achsenspiegelung dargestellt (Unterkapitel 5.2).

### 5.1 Wissen zu Aufgabenmerkmalen im Bereich Symmetrie und Achsenspiegelung

Die Ergebnisse zum Wissen zu Aufgabenmerkmalen (Forschungsschwerpunkt 1) sind in vier Abschnitte gegliedert. In den ersten beiden Abschnitten werden zunächst Ergebnisse zu Aufgaben zur Achsenspiegelung geschildert (Forschungsdesiderate 3 und 4). In den beiden darauffolgenden Abschnitten werden Ergebnisse bezüglich der Aufgaben im Bereich Symmetrie zusammengetragen (Forschungsdesiderat 5). Zu den beiden Inhalten Achsenspiegelung und Symmetrie werden jeweils zunächst Ergebnisse zu Merkmalen von Aufgaben und anschließend typische Fehler dargestellt.

#### 5.1.1 Merkmale von Aufgaben zur Achsenspiegelung und deren Ausprägungen

Zur Identifikation inhaltsbezogener schwierigkeitsbestimmender Aufgabenmerkmale, zogen Götz und Gasteiger (2019) zum einen bereits aus empirischen Studien bekannte schwierigkeitsgenerierende Merkmale heran, um Aufgaben systematisch zu variieren, und diese schwierigkeitsgenerierenden Merkmale auf ihre Gültigkeit in der Grundschule hin zu prüfen. Zum anderen wurden im vorliegenden Aufgabenpool der Studie Muster gesucht, die zur Identifikation weiterer schwierigkeitsbestimmender Aufgabenmerkmale führen könnten (vgl. Götz & Gasteiger 2019). Dazu wurden auf Basis psychometrischer Analysen der Aufgaben aus den Erprobungsstudien<sup>22</sup> qualitative Analysen der Aufgaben durchgeführt. Jede Aufgabe lässt sich durch eine bestimmte Kombination an Merkmalen charakterisieren. Anhand dieser Merkmale wurden systematisch Aufgabenpaare gebildet und bezüglich ihrer Schwierigkeit

---

<sup>22</sup> Das Erhebungsdesign, die Datenerhebung, die Codierung der Daten sowie die Datenanalysen wurden am Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen – Wissenschaftliche Einrichtung der Länder an der Humboldt-Universität zu Berlin e.V. durchgeführt und werden hier nur berichtet.

verglichen. Jedes Aufgabenpaar wurde dergestalt zusammengestellt, dass nur ein theoretisch belegtes Aufgabenmerkmal verändert wurde und alle anderen konstant gehalten wurden. Ergänzend zum Vergleich der Aufgabenpaare wurden jeweils alle Aufgaben derselben Kompetenzstufe (Reiss & Winkelmann 2008, 2009; vgl. auch KMK 2013) betrachtet, um Rückschlüsse auf weitere Merkmale zu ziehen, die sich als schwierigkeitsgenerierend bei Achsenspiegelungen erwiesen (Götz & Gasteiger 2019). Die Ergebnisse dieser Analysen werden in Abbildung 10 präsentiert.

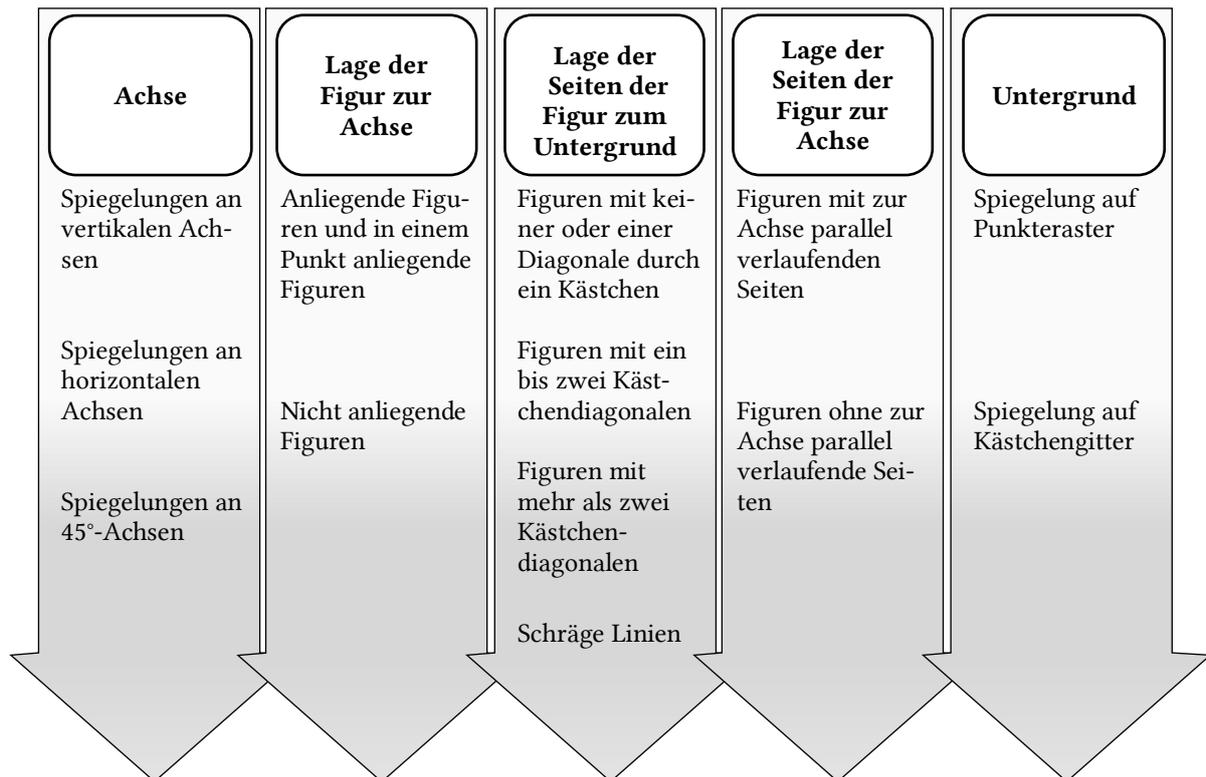


Abbildung 10: Kategorienschema bezüglich schwierigkeitsgenerierender Merkmale bei der Achsenspiegelung und ihren Ausprägungen (ordinalskaliert angeordnet) (vgl. Götz & Gasteiger 2019, S. 316)

Die herausgearbeiteten schwierigkeitsgenerierenden Merkmale (siehe Abbildung 10) werden im Folgenden detailliert beschrieben und in ihrer Genese nachvollzogen.

#### 5.1.1.1 Lage der Achse

Die Lage der Achse zum Blattrand konnte als schwierigkeitsbestimmendes Merkmal in der Studie von Götz und Gasteiger (2019) bestätigt werden. Die Analysen zeigten, dass die Schwierigkeit von Aufgaben bezüglich des Merkmals Lage der Achse den zuvor berichteten Forschungsarbeiten (u. a. Bornstein & Stiles-Davis 1984; Küchemann 1981; Grenier 1985a, 1985b; Schmidt 1986) entspricht: Spiegelungen an vertikalen Achsen fallen Schülerinnen und

Schülern der Jahrgangsstufe 3 leichter als Spiegelungen an horizontalen Achsen. Spiegelungen an 45°-Achsen<sup>23</sup> wurden von Schülerinnen und Schülern der Jahrgangsstufe 3 am seltensten gelöst (Götz & Gasteiger 2019; vgl. Abbildung 10, Spalte 1). Gleichermaßen geht aus diesen Analysen hervor, dass es weitere Aufgabenmerkmale gibt, die die Schwierigkeit einer Aufgabe ebenso beeinflussen. Durch eine ausführliche Analyse der Aufgaben mittels des oben geschilderten Paarvergleichs von Aufgaben in puncto Schwierigkeiten konnten weitere Merkmale herausgearbeitet werden (Götz & Gasteiger 2019).

#### 5.1.1.2 Lage der Figur zur Achse

Die Lage der Figur zur Achse konnte als weiteres schwierigkeitsbeeinflussendes Merkmal identifiziert werden. Durch den Vergleich von Aufgabenpaaren, die sich lediglich im Merkmal Abstand der Figur zur Achse unterschieden, zeigten Götz und Gasteiger (2019), dass Aufgaben zur Achsenspiegelung, die zu zwei kongruenten Figuren führen, schwieriger sind, als Aufgaben zur Achsenspiegelung, die zu einer symmetrischen Figur führen<sup>24</sup> (vgl. Abbildung 10, Spalte 2). Dieses Ergebnis zeigte sich sowohl für die Spiegelung von Figuren an vertikal, horizontal als auch an 45° zum Blattrand ausgerichteten Achsen (Götz & Gasteiger 2019).

#### 5.1.1.3 Komplexität der Figur

Mehrere Studien stellten die Komplexität der Figur als eines der Merkmale dar, die einen Einfluss auf die Bearbeitung von Aufgaben zur Achsenspiegelung haben (Höglinger & Senftleben 1997; Küchemann 1981; Grenier 1985a, 1985b; vgl. Abschnitt 2.3.2.1). Diese Ergebnisse zur Komplexität der Figur können jedoch nicht direkt auf Achsenspiegelungen, wie sie in der Grundschule üblich sind, übertragen werden: Die berichteten Studien beziehen sich überwiegend auf die Spiegelung von Punkten, Strecken und Fahnen, im Unterricht der Grundschule werden jedoch überwiegend geschlossene Figuren gespiegelt, welche somit auch eine andere Komplexität aufweisen. Vergleichende Analysen der in dieser Studie verwendeten Aufgaben,

---

<sup>23</sup> Bei allen Aufgaben zur Achsenspiegelung an schrägen Achsen, die im Rahmen dieser Arbeit verwendet wurden, wurde darauf geachtet, dass die schräge Achse im 45°-Winkel zum Betrachter liegt. Aus diesem Grund wird in Bezug auf das verwendete Aufgabenmaterial immer von Aufgaben an 45°-Achsen gesprochen. Aus den zuvor berichteten Forschungsergebnissen geht nicht immer klar hervor, welche Lage „schräge Achsen“ hatten – aus diesem Grund wurde beim Berichten dieser Aufgaben lediglich der Begriff „schräge Achse“ verwendet.

<sup>24</sup> Aufgaben zur Achsenspiegelung, die zu zwei kongruenten Figuren führt, werden mit dem Merkmal der Figur „nicht anliegend“ bezeichnet. Bei diesen Aufgaben gibt es keine Fixpunkte bei der Achsenspiegelung. Aufgaben zur Achsenspiegelung, bei welchen die Figur mindestens einen Fixpunkt mit der Achse hat (vgl. Abschnitt 2.2.3.1), werden mit dem Merkmal „anliegend“ einer Figur bezeichnet.

zeigten, dass der Begriff der Komplexität bei der Spiegelung von geschlossenen Figuren in mehrere Merkmale aufgliedert werden kann (Götz & Gasteiger 2019):

**Lage der Seiten der Figur zum Untergrund.** Abbildung 10 (Spalte 3) stellt die Ausprägungen des Merkmals Lage der Seiten der Figur zum Untergrund dar. Durch den Vergleich von Aufgabenpaaren sowie durch die Analyse der Verteilung aller Aufgaben bezüglich dieser Merkmalsausprägungen über die Kompetenzstufen hinweg konnten unterschiedliche Schwierigkeiten der Ausprägungen dieses Merkmals herausgearbeitet werden (Götz & Gasteiger 2019). Dabei werden bei der Betrachtung dieses Merkmals alle Seiten der Figur berücksichtigt. Aufgaben mit Figuren mit „keiner oder einer Diagonale durch **ein** Kästchen“ werden am besten bearbeitet. Aufgaben mit Figuren mit „ein bis zwei Kästchendiagonalen durch **mehr als ein** Kästchen“ sind bereits etwas schwieriger, jedoch leichter als Aufgaben mit Figuren mit „mehr als zwei Kästchendiagonalen“. Aufgaben mit Figuren mit „schrägen Linien<sup>25</sup>“ haben die höchste Schwierigkeit (Götz & Gasteiger 2019). Die Ausprägungen dieses Merkmals konnten systematisch an vertikalen Achsen untersucht werden, für Aufgaben mit einer anderen Lage der Achse konnte lediglich konstatiert werden, dass Figuren mit dem Merkmal „mehr als zwei Kästchendiagonalen und/ oder schräge Linien“ deutlich am schwierigsten sind (Götz & Gasteiger 2019).

**Spiegelung führt zur Überlagerung von Figur und Spiegelfigur.** In das Design dieser Studie nahmen Götz und Gasteiger (2019) exploratorisch eine Aufgabe auf, bei der die Spiegelung der Figur an der vorgegebenen Achse zu einer Überlagerung von Figur und Spiegelfigur führt. Der paarweise Vergleich dieser Aufgabe mit einer ähnlichen Aufgabe<sup>26</sup> zeigte, dass insbesondere die Überlagerung von Figur und Spiegelfigur eine besondere Schwierigkeit darstellt (Götz & Gasteiger 2019).

#### 5.1.1.4 Lage der Seiten der Figur zur Achse

Bereits in den Studien von Küchemann (1981) und Grenier (1985a) wurde die Ausrichtung der Figur zur Achse als Merkmal herausgestellt, das einen Einfluss auf die Bearbeitung der Aufgaben zur Achsenspiegelung hat (vgl. Abschnitt 2.3.2.1). Da es sich bei Aufgaben der genannten

---

<sup>25</sup> Unter einer schrägen Linie wird eine Begrenzungslinie einer Figur verstanden, die weder entlang des Kästchengitters noch diagonal durch die Kästchen verläuft, sondern das Kästchengitter „irgendwie“ schneidet.

<sup>26</sup> Diese Aufgabe erforderte ebenso das Ergänzen auf beiden Seiten der Achse, jedoch ohne Überlagerung. Alle weiteren Merkmale entsprachen sich.

Studien um die Spiegelung von Punkten, Strecken und Fahnen von Schülerinnen und Schülern im Alter von 11-15 Jahren handelt, können diese Ergebnisse nicht unmittelbar auf Aufgaben zur Achsenspiegelung in der Grundschule übertragen werden. Götz und Gasteiger (2019) arbeiteten im Kontext der Grundschule die Lage der Seiten der Figur zur Achse als schwierigkeitsgenerierendes Merkmal heraus. Dabei konnten die Merkmalsausprägungen „Seite parallel zur Achse“ und „Seite nicht parallel zur Achse“ unterschieden werden (vgl. Abbildung 10, Spalte 4). Die Betrachtung der Verteilung aller Aufgaben bezüglich dieser Merkmalsausprägungen über die Kompetenzstufen hinweg sowie weitere paarweise Vergleiche von Aufgaben an 45°-Achsen zeigten, dass Aufgaben die mindestens eine „Seite parallel zur Achse“ haben, auf einer geringeren Schwierigkeitsstufe liegen, als Aufgaben, die „keine Seite parallel zur Achse“ aufweisen (Götz & Gasteiger 2019).

#### 5.1.1.5 *Art des Untergrundes*

Die Art des Untergrundes stellt ein Aufgabenmerkmal dar, zu dem in bisherigen Forschungsberichten keine Einigkeit bestand (vgl. Grenier 1985a; Küchemann 1981; vgl. Abschnitt 2.3.2.1). In der vorliegenden Studie unterschieden Götz und Gasteiger (2019) bei der Betrachtung der Art des Untergrundes die Ausprägungen „Punkteraster“ und „Kästchengitter“. Der paarweise Vergleich von Aufgabenpaaren an vertikalen Achsen zeigte, dass Spiegelungen, die auf dem Untergrund „Punkteraster“ durchgeführt wurden, eine deutlich geringere Schwierigkeit aufweisen, als vergleichbare Aufgaben, die auf dem Untergrund „Kästchengitter“ bearbeitet wurden (Götz & Gasteiger 2019; vgl. Abbildung 10, Spalte 5).

#### 5.1.2 Fehler bei Aufgaben zur Achsenspiegelung

Typische Fehler bei der Achsenspiegelung (vgl. Forschungsdesiderat 4) wurden in mehreren Studien erhoben (vgl. Götz & Gasteiger 2018a, 2018b; Götz 2020; Götz & Schulz 2018) und werden an dieser Stelle zusammengefasst. Wie bereits berichtet, macht es einen Unterschied, ob die Spiegelung an einer Achse zu einer symmetrischen Figur führt (Figur hat mind. einen Fixpunkt mit der Achse; anliegende Figur) oder ob die Spiegelung an einer Achse zu zwei kongruenten Figuren führt (nicht anliegende Figur) (vgl. Götz & Gasteiger 2019; siehe Abbildung 10, Spalte 2). Aus diesem Grund wird auch in den folgenden Abschnitten nach diesen Aufgabentypen unterschieden.

### 5.1.2.1 Fehler bei nicht anliegenden Figuren

Sowohl Götz und Gasteiger (2018a, 2018b) als auch Götz (2020) konnten zeigen, dass es spezifische Fehler bei der Achsenspiegelung von nicht anliegenden Figuren gibt, die immer wieder auftreten. Diese Ergebnisse wurden sowohl für Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 3 (Götz & Gasteiger 2018a, 2018b) als auch der Jahrgangsstufe 7 (Götz 2020) gezeigt. Abbildung 11 stellt exemplarisch typische Fehler dar, die in diesen Studien identifiziert wurden.

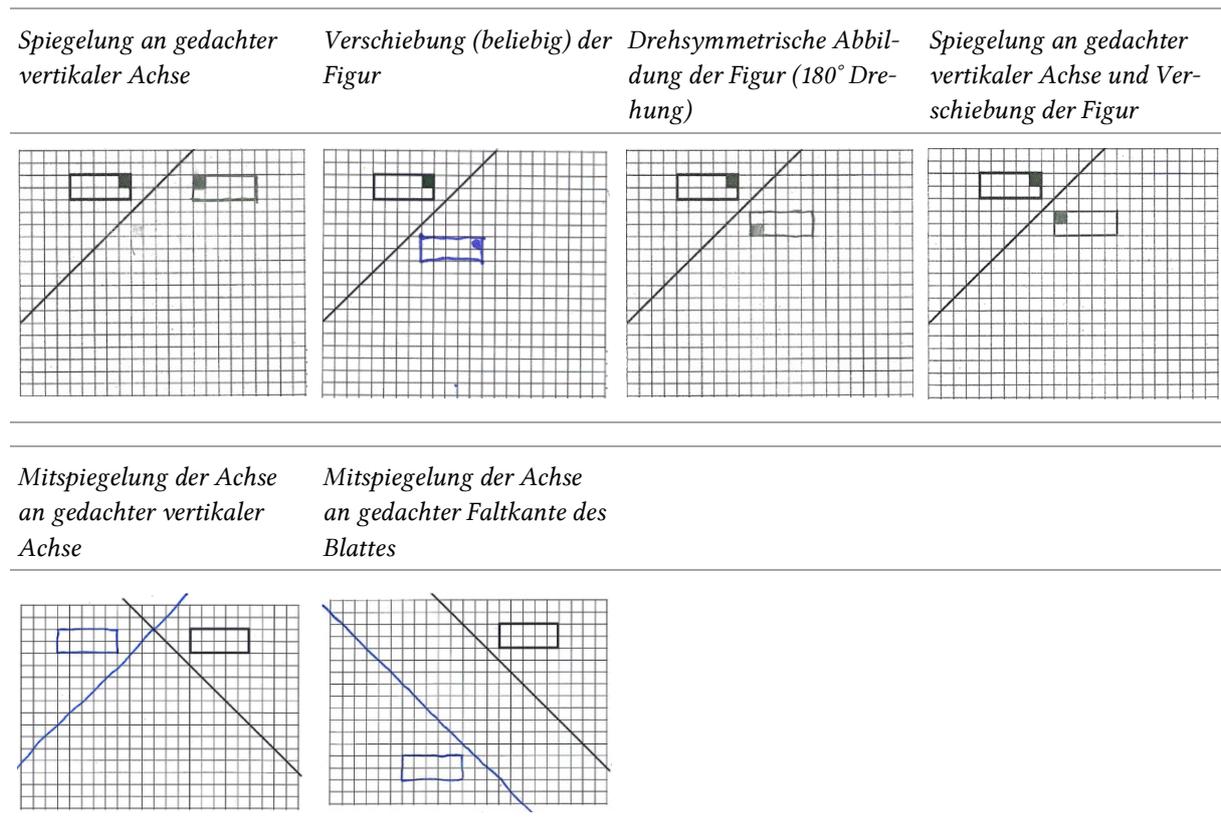


Abbildung 11: Typische Schülerfehler bei der Spiegelung der Achse nicht anliegender Figuren (vgl. Götz 2020; Götz & Gasteiger 2018b)

**Mitspiegelung der Achse.** Ein Fehler, der lediglich in den Lösungsprodukten der Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 3 auftrat, war die „Mitspiegelung der Achse an einer gedachten Spiegelachse“ (vgl. Abbildung 11) (Götz & Gasteiger 2018a, 2018b). Dabei wird bei diesen Lösungsprodukten nicht nur eine Bildfigur gezeichnet, sondern des Weiteren auch eine „Bildachse“ (vgl. Abbildung 11, *Mitspiegelung der Achse an gedachter Faltkante des Blattes* und *Mitspiegelung der Achse an gedachter vertikaler Achse*).

**Verschiebung der Figur.** Die „Verschiebung der Figur“ statt einer Spiegelung war in allen durchgeführten Studien einer der Fehler, der – neben der „Spiegelung an einer vertikalen Achse“ – am häufigsten auftrat (Götz & Gasteiger 2018a, 2018b; Götz 2020; Götz & Gasteiger 2022). Verschiebungen, die in den Lösungsprodukten der Schülerinnen und Schüler identifiziert werden konnten, waren zum einen beliebiger Art (vgl. Abbildung 11, *Verschiebung (beliebig) der Figur*) und konnten zum anderen auf weitere Aufgabenmerkmale zurückgeführt werden: Götz und Gasteiger (2018a) stellten nach qualitativer Analyse der Lösungsprodukte fest, dass die Figur selbst einen Einfluss auf die Richtung hat, in der die Figur verschoben wird (entlang der Vertikalen oder Horizontalen). Die zu spiegelnden Figuren dieser Studie (Götz & Gasteiger 2018a) waren sowohl vertikal- als auch horizontal-achsensymmetrisch (bspw. Rechtecke) und sollten an einer 45°-Achse gespiegelt werden. Eine Verschiebung entlang der Vertikalen fand überwiegend statt, wenn die Figur vertikal ausgerichtet war (vgl. Abbildung 12, rechts). Eine Verschiebung entlang einer Horizontalen fand überwiegend statt, wenn die Figur horizontal ausgerichtet war (vgl. Abbildung 12, links). Bei der Spiegelung von Figuren ohne eindeutige Ausrichtung (bspw. Quadrat), zeigte sich in den Lösungsprodukten häufiger eine Verschiebung entlang der Horizontalen als entlang der Vertikalen (Götz & Gasteiger 2018b). Unklar ist jedoch, ob die Figur tatsächlich verschoben wurde oder ob der letztgenannte Fehler auf die „Spiegelung an einer gedachten vertikalen Achse“ (s.u.) zurückzuführen ist.

**Spiegelung an gedachter vertikaler Achse.** Der Fehler der „Spiegelung an einer gedachten vertikalen Achse“ (vgl. Abbildung 11) war einer der häufigsten Fehler, der in den Lösungsprodukten der Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 7 identifiziert wurde (Götz 2020). Die Achse, an der die Figur gespiegelt wurde, war in diesen Fällen nicht die gegebene 45°-Achse, sondern eine gedachte vertikale Achse. Auch in den Lösungsprodukten von Schülerinnen und Schülern der Jahrgangsstufe 4 konnte dieser Fehler bei einer kleinen Stichprobe identifiziert werden (Götz & Gasteiger 2022). In der Studie von Götz und Gasteiger (2018a, 2018b) konnte dieser Fehler durch eine ungünstige Figurwahl nicht unterschieden werden von dem Fehler „Verschiebung der Figur“ entlang der Horizontalen. In der Studie von Götz und Gasteiger (2018a, 2018b) war ein Rechteck an einer 45°-Achse zu spiegeln, welches nicht wie in der Studie Götz (2020; siehe Abbildung 11) ein kleines schwarzes Kästchen hatte (siehe Abbildung 12).

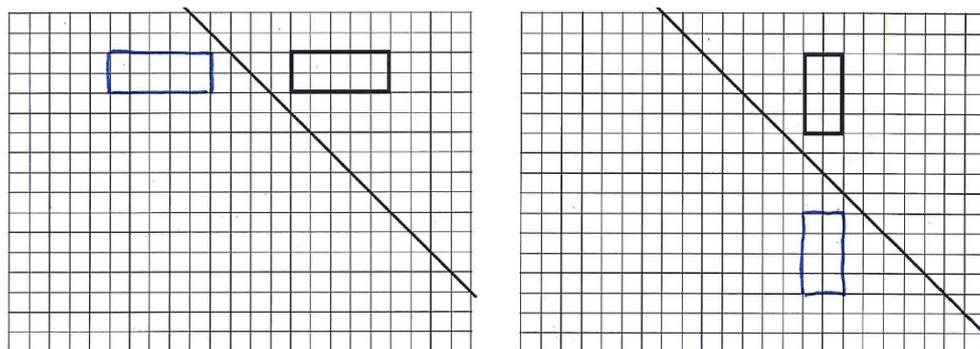


Abbildung 12: Beispielaufgaben „Rechteck ohne kleines schwarzes Kästchen“ aus der Studie Götz und Gasteiger (2018b) (links: entlang der Horizontalen ausgerichtet; rechts: entlang der Vertikalen ausgerichtet)

Da dadurch das Rechteck ohne das schwarze Kästchen selbst vertikal- und horizontal-achsensymmetrisch ist, konnte das Lösungsprodukt der „Spiegelung an einer gedachten vertikalen Achse“ nicht von dem Lösungsprodukt der „Verschiebung der Figur entlang einer Horizontalen“ unterschieden werden (siehe Lösungsprodukt in Abbildung 12, links).

**Drehsymmetrische Abbildung der Figur (180° Drehung).** Bei diesem Lösungsprodukt (vgl. Abbildung 11), entsteht die Bildfigur durch eine Drehung der Figur um 180°. Götz (2020) konnte diesen Fehler bei Schülerinnen und Schülern der Jahrgangsstufe 7 identifizieren. In der Studie, die in Jahrgangsstufe 3 durchgeführt wurde (Götz & Gasteiger 2018a), konnte nicht unterschieden werden, welcher Gedanke hinter dem Lösungsprodukt steht. Aufgrund der Figurwahl sind die Lösungsprodukte bei „einer 180°-Drehung um ein Drehzentrum“ und die „Spiegelung an einer gedachten vertikalen Achse mit Verschiebung“ bei den in der Studie von Götz und Gasteiger (2018a, 2018b) gewählten Figuren nicht zu unterscheiden.

**Spiegelung an gedachter vertikaler Achse und Verschiebung der Figur.** Die Figurwahl der Studie von Götz (2020) (Figur mit kleinem schwarzen Rechteck im Rechteck, siehe Abbildung 11) mit Schülerinnen und Schülern der Jahrgangsstufe 7 und auch in der kleineren Studie in Jahrgangsstufe 4 (Götz & Gasteiger 2022) machte eine genauere Unterscheidung einzelner Lösungsprodukte möglich. Während der Fehler „Spiegelung an einer gedachten vertikalen Achse und Verschiebung der Figur“ in der Grundschulstudie selten auftrat, kamen in der Studie in der Sekundarstufe immerhin knapp 15% der Schülerinnen und Schüler zu diesem Lösungsprodukt (Götz 2020).

### 5.1.2.2 Fehler bei Figuren, die der Achse anliegen

Auch für die Spiegelung anliegender Figuren konnten spezifische Fehler sowohl in Jahrgangsstufe 3 (Götz & Schulz 2018; vgl. auch Köller 2019<sup>27</sup>) als auch in Jahrgangsstufe 7 identifiziert werden (Götz 2020).

**Verlängerung zweier Seiten der Figur.** Auffällig bei Aufgaben mit anliegenden Figuren war die Häufigkeit der Lösungsprodukte, bei denen Seiten der Figur über die Achse hinweg verlängert, also weitergezogen, wurden. Dieser Fehlertyp zeigte sich sowohl in Jahrgangsstufe 7 (vgl. Abbildung 13; Götz 2020), als auch in Jahrgangsstufe 3 (Götz & Schulz 2018) und 4 (Köller 2019). Eine genaue Betrachtung der Lösungsprodukte der Schülerinnen und Schüler ergab, dass die Verlängerungen unterschiedlicher Art waren. Die *Verlängerung der horizontal liegenden Seiten* war in Jahrgangsstufe 7 (Götz 2020) und Jahrgangsstufe 3 sowie Jahrgangsstufe 4 (Köller 2019) der häufigste Fehler (mit fast 30%) (vgl. Abbildung 13, Figur links). Die Schülerinnen und Schüler zeichneten bei diesem Lösungsprodukt die beiden horizontal liegenden Linien der Figur entlang der Kästchengitterlinien weiter.

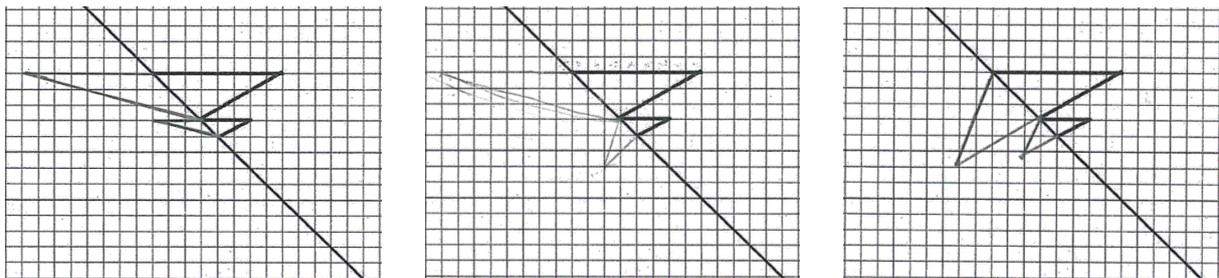


Abbildung 13: Beispiele der Verlängerung der Seiten der Figur (links: Verlängerung horizontal liegender Seiten der Figur; Mitte: Verlängerung außen liegender Seiten der Figur; rechts: Verlängerung der schräg liegenden Seiten der Figur).

In einigen anderen Lösungsprodukten verlängerten die Schülerinnen und Schüler die *schräg liegenden Seiten der Figur* (vgl. Abbildung 13, rechts) oder die *außen liegenden Seiten der Figur* (vgl. Abbildung 13, Mitte).

**Spiegelung an einer vertikalen Achse.** Dieser Fehler trat bei der Spiegelung von der Achse nicht anliegenden Figuren sehr häufig auf (s.o.). Bei der Spiegelung anliegender Figuren konnte das Lösungsprodukt „Spiegelung an einer vertikalen Achse“ jedoch nur selten

---

<sup>27</sup> Hierbei handelt es sich um eine Bachelor-Arbeit, die von Götz und Gasteiger im Jahr 2019 betreut wurde.

identifiziert werden. In Jahrgangsstufe 7 wurde dieser Fehler von weniger als 5% der Schülerinnen und Schüler gemacht (Götz 2020). Auch in der Grundschule kam der Fehler nur selten vor (Götz & Schulz 2018; Köller 2019) (vgl. Abbildung 14).

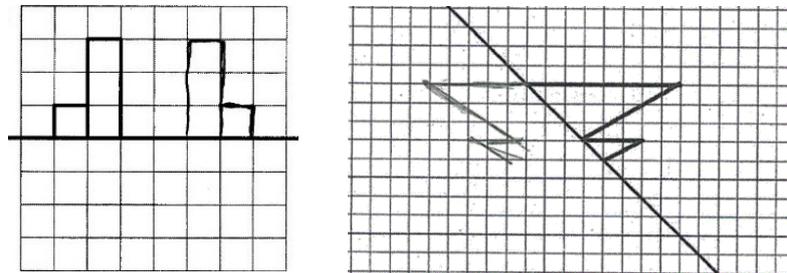


Abbildung 14: Spiegelung an einer gedachten vertikalen Achse (links: Jahrgangsstufe 3; rechts: Jahrgangsstufe 7 und 4).

**Mitspiegelung der Achse.** Dieser Fehler trat – wie auch bei nicht anliegenden Figuren – nur in der Grundschule auf. Bei diesen Lösungsprodukten wurde die gegebene Spiegelachse nicht beachtet und eine gedachte Spiegelachse bei der Spiegelung als Referenz verwendet (vgl. Abbildung 15, links). Götz und Schulz (2018) bezeichneten diesen Fehler auch als „Trennen“, dabei wird die gegebene Spiegelachse als Teil der Figur gesehen und mitgespiegelt.

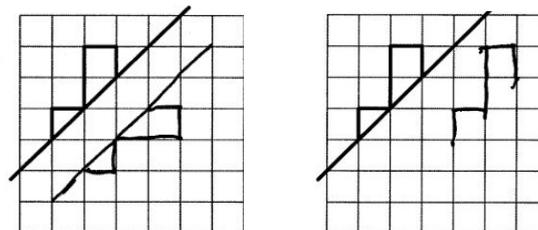


Abbildung 15: Fehler bei anliegenden Figuren in Jahrgangsstufe 3 (links: Mitspiegelung der Achse; rechts: Verschiebung der Figur).

**Verschiebung der Figur.** Ein weiterer Fehler, der nur in den Studien in der Grundschule und auch dort nur selten auftrat, war das Verschieben einer anliegenden Figur entlang der Horizontalen über die 45°-Achse hinweg (vgl. Abbildung 15, rechts).

**(Drehsymmetrische) Ergänzung.** Abbildung 16 zeigt Lösungsprodukte der Jahrgangsstufe 7 (links) und 3 (rechts), bei welchen die Figur scheinbar ergänzt wurde. Derartige Ergänzungen kamen in Jahrgangsstufe 7 bei unter 5% der Schülerinnen und Schüler vor. In der Grundschule war die „Ergänzung“ der abgebildeten Figur jedoch einer der häufigsten Fehler (Götz & Schulz 2018). Es kann aus den Lösungsprodukten nicht unterschieden werden, ob es sich hier um eine drehsymmetrische Ergänzung oder lediglich um eine Ergänzung der Figur nach einer individuellen Vorstellung handelt.

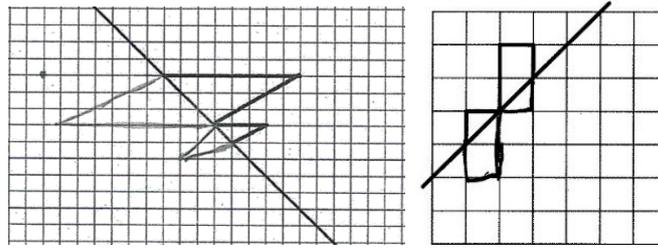


Abbildung 16: (Drehsymmetrische) Ergänzung der Figuren (links: Jahrgangsstufe 7; rechts: Jahrgangsstufe 3)

**Teilweise richtige Lösung.** Wie Götz (2020) berichtet, zeigen sich in Jahrgangsstufe 7 einige Lösungsprodukte, die teilweise richtig sind bzw. scheint diesen Lösungsprodukten eine grundsätzlich richtige Vorstellung der Achsenspiegelung zugrunde zu liegen, aber die Spiegelung wurde nicht exakt durchgeführt (vgl. Abbildung 17). Das Lösungsprodukt in Abbildung 17 zeigt, dass der kleinere Teil der Figur korrekt gespiegelt wurde, während bei der größeren Teilfigur zwar die grobe Richtung stimmt, jedoch die Spitze um ein Kästchen versetzt ist.

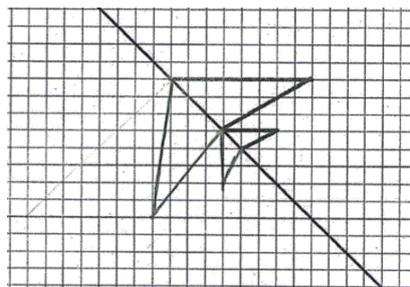


Abbildung 17: Teils richtige Lösung in Jahrgangsstufe 7

Die Lösungsprodukte der Schülerinnen und Schüler der Grundschule und der Jahrgangsstufe 7 geben Hinweise darauf, dass Aufgabenmerkmale nicht nur einen Einfluss auf die Schwierigkeit von Aufgaben, sondern auch auf die konkrete Aufgabenbearbeitung haben. Zusätzlich deutet sich in den Lösungsprodukten an, dass Fehler nicht willkürlich entstehen, sondern einen gewissen Zusammenhang zwischen den Fehlern und möglichen Vorstellungen zur Achsenspiegelung der Schülerinnen und Schüler vermuten lassen. Das Ziel, diese Zusammenhänge aufzuarbeiten, verfolgt Abschnitt 5.2.1.3.

### 5.1.3 Aufgabenmerkmale mit Einfluss auf das Lösen von Symmetriaufgaben

Ein weiteres Forschungsdesiderat dieser Arbeit ist – neben dem Herausarbeiten von schwierigkeitsgenerierenden Merkmalen und Fehlern bei Aufgaben zur Achsenspiegelung – auch das Identifizieren von Merkmalen von Aufgaben, die einen Einfluss auf das Lösen von Sym-

metrieraufgaben haben (Forschungsdesiderat 5). Die Studie von Götz, Gasteiger & Kühnhenrich (2020) widmete sich diesem Desiderat. Dazu wurden u. a. Aufgaben eingesetzt, bei denen eine Spiegelachse in eine ebene Figur eingezeichnet werden sollte (vgl. Abbildung 18 und Abbildung 19). Die Ergebnisse dieser Studie werden in den folgenden Abschnitten dargestellt.

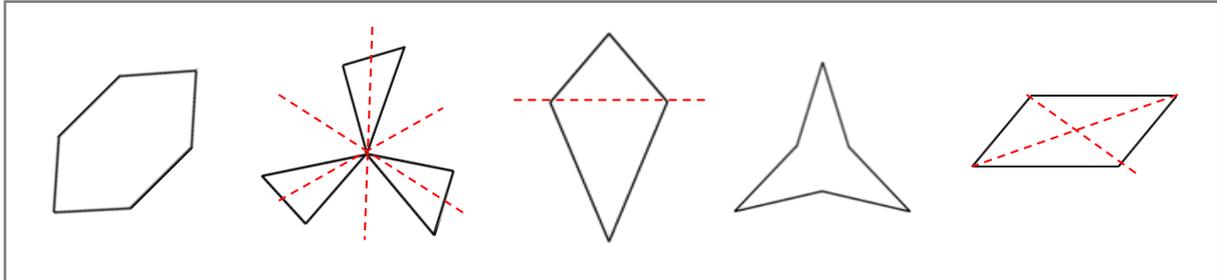


Abbildung 18: Aufgabenbeispiele aus der Studie Götz et al. (2020) (von links nach rechts: Diamant (achsen- und punktsymmetrisch), Windrad (drehsymmetrisch), Drachen (rein achsensymmetrisch), Dreistern (achsen- und drehsymmetrisch) und Parallelogramm (punktsymmetrisch)) (in Rot: Beispiele fehlerhaft eingezeichneter Achsen).

#### 5.1.3.1 Ausrichtung der Achse

Bereits berichtete Erkenntnisse zu Eigenschaften von Figuren und insbesondere zur Lage der einzuzeichnenden Achse (vertikal-, horizontal- oder schräg-achsensymmetrisch) (vgl. Bornstein et al. 1981; Bornstein & Krinsky 1985; Boswell 1976; Bornstein & Stiles-Davis 1984; Schmidt 1986; siehe Abschnitt 2.3.3.2) konnten in der Studie von Götz et al. (2020) bestätigt werden. Die Analyse der relativen Häufigkeiten richtig eingezeichneter Spiegelachsen unterschiedlicher Ausrichtung zeigte, dass vertikale Achsen über alle Figuren hinweg häufiger richtig eingezeichnet wurden (87,03%) als horizontale Achsen (65,35%). Am seltensten richtig wurden schräge Achsen eingezeichnet (47,56% im Mittel über links- und rechtsschräge Achsen) (Götz et al. 2020).

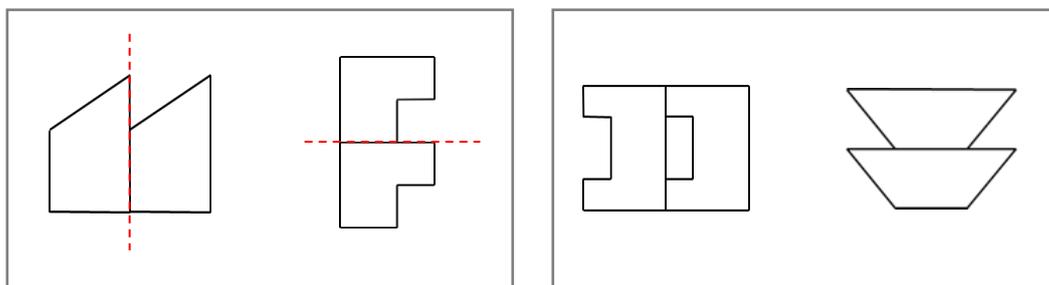


Abbildung 19: Von links nach rechts Schubfiguren (Doppeltes Pultdach und Doppelter Winkel), achsensymmetrische Schubfiguren (Doppelter Bogen und Doppeltes Boot) (in Rot: Beispiele fehlerhaft eingezeichneter Achsen)

Beim Einzeichnen der Symmetrieachsen zeigten sich darüber hinaus auch Unterschiede in den Lösungshäufigkeiten von Aufgaben mit Figuren, deren Symmetrieachse gleich ausgerichtet war. Diese sind möglicherweise abhängig von weiteren Figurmerkmalen. Die vertikale Achse, die am seltensten eingezeichnet wurde (Doppeltes Boot: 69,7%; vgl. Abbildung 19) und die horizontale Achse, die am seltensten richtig eingezeichnet wurde (Doppelter Bogen: 41,5%; vgl. Abbildung 19), waren beides Achsen in achsensymmetrischen Schubfiguren (Götz et al. 2020).

### 5.1.3.2 Arten der Symmetrieabbildungen der Figur inkl. Parallelverschiebung

Erste Hinweise deuten darauf hin, dass die Symmetrieeigenschaften von Figuren einen Einfluss auf das Erkennen der Figur als achsensymmetrisch bzw. das korrekte Einzeichnen von Symmetrieachsen haben (Genkins 1978; Schmidt 1986; vgl. auch Grohe 2011; siehe Abschnitt 2.3.3.2). Bei der Analyse deskriptiver Lösungshäufigkeiten bezüglich des Merkmals „Arten der Symmetrieabbildungen einer Figur inkl. Parallelverschiebung“ betrachteten Götz et al. (2020) nicht-achsensymmetrische (drehsymmetrische Figuren, punktsymmetrische Figuren und Schubfiguren) und achsensymmetrische Figuren (nur achsensymmetrische Figuren, achsensymmetrische Schubfiguren, achsen- und punktsymmetrische Figuren, achsen-, punkt- und drehsymmetrische Figuren sowie achsen- und drehsymmetrische Figuren<sup>28</sup>). Die Lösungshäufigkeiten bei Aufgaben mit Figuren, die sich nach „Arten der Symmetrieabbildung inkl. Parallelverschiebung“ unterscheiden, sind in Tabelle 3 dargestellt.

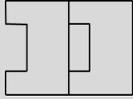
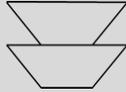
Unter den nicht-achsensymmetrischen Figuren wurden drehsymmetrische Figuren am besten gelöst (94%) und richtig als nicht achsensymmetrisch erkannt. Zu 85% wurden Schubfiguren richtig als nicht achsensymmetrisch erkannt. Geringere Lösungshäufigkeiten hatten punktsymmetrische Figuren (51%), wobei hier die Lösungshäufigkeiten stark schwanken (Götz et al. 2020; vgl. Tabelle 3, Spalten 3 und 4).

Unter den achsensymmetrischen Figuren wurden die rein achsensymmetrischen Figuren am besten gelöst (84%). Alle Aufgaben, die eine weitere Symmetrieeigenschaft haben, hatten geringere Lösungshäufigkeiten. Durchschnittlich zu 53% wurde die Spiegelachse richtig in achsensymmetrische Schubfiguren eingezeichnet (abweichende Lösungshäufigkeiten siehe Tabelle 3, Spalte 3 und 4).

---

<sup>28</sup> In der Kategorie drehsymmetrische Figuren sind alle Figuren zusammengefasst, die einen Drehwinkel kleiner  $360^\circ$  haben und nicht punktsymmetrisch sind.

Tabelle 3: Lösungshäufigkeiten nach Arten der Symmetrieabbildungen inkl. Parallelverschiebung (in grau: achsensymmetrische Figuren; weiß hinterlegt: nicht-achsensymmetrische Figuren). Tabellenspalten 3 und 4 stellen stark vom Mittelwert abweichende Lösungshäufigkeiten innerhalb einer Art der Symmetrieabbildung dar.

Arten der Symmetrieabbildung inkl. Parallelverschiebung	Ø Lösungshäufigkeit	Abweichend geringe Lösungshäufigkeit	Abweichend hohe Lösungshäufigkeit
drehsymmetrisch	94%		
Schubfiguren	85%		
Achsensymmetrisch	84%		
Achsensymmetrische Schubfiguren	53%	 Doppelter Bogen 37%	 Doppeltes Boot 68%
Punktsymmetrisch	51%	 Parallelogramm 33%	 Fahne 69%
Achsen- und drehsymmetrisch	51%		
Achsen-, punkt- und drehsymmetrisch	31%	 Vierstern 17%	 Quadrat 44%
Achsen- und drehsymmetrisch	15%		

Aufgaben zu achsen- und punktsymmetrischen Figuren wurden zu 51% korrekt bearbeitet und Aufgaben zu achsen-, punkt- und drehsymmetrischen Figuren zu 31% (abweichende Lösungshäufigkeiten siehe Tabelle 3, Spalte 3 und 4). Die geringsten Lösungshäufigkeiten zeigten sich bei achsen- und drehsymmetrischen Figuren, die nicht punktsymmetrisch sind (15%) (Götz et al. 2020).

### 5.1.3.3 Anzahl der Symmetrieachsen der Figur

Ein weiteres Merkmal von Aufgaben, zu dem mögliche Zusammenhänge mit dem Lösen von Symmetrieaufgaben berichtet wurden, ist die „Anzahl der Symmetrieachsen der Figur“ (vgl.

Abschnitt 2.3.2.3). Diese Vermutung konnten Götz et al. (2020) weder bestätigen noch widerlegen. Bei der Betrachtung der Lösungshäufigkeiten jedes Items, sortiert nach der Anzahl der Achsen, zeigten sich Tendenzen, dass Aufgaben mit keiner Symmetrieachse (nicht achsensymmetrische Figuren) besser gelöst wurden als Aufgaben mit einer höheren Anzahl an Symmetrieachsen. Diese Tatsache kann jedoch auch dem geschuldet sein, dass bei einer größeren Anzahl an einzuzeichnenden Symmetrieachsen, mehr Achsen vergessen werden können. Weiterhin konnten Götz et al. (2020) aus der Betrachtung dieser Lösungshäufigkeiten Ausreißer identifizieren, die durch besonders gute bzw. schlechte Lösungshäufigkeiten auffielen. Die Autorinnen folgern daraus, dass es wohl nicht ausschließlich der Anzahl der Symmetrieachsen zugeschrieben werden kann, ob eine Aufgabe gut gelöst wird oder nicht (Götz et al. 2020). Diese Vermutung lässt sich auch dadurch stützen, dass die hier berichteten Merkmale von Aufgaben, die einen Einfluss auf die Lösungshäufigkeiten der einzelnen Items haben, in engem Zusammenhang mit typischen Fehlern stehen, die die Schülerinnen und Schüler bei diesen Aufgaben gemacht haben.

#### 5.1.4 Fehler bei Aufgaben zum Erkennen achsensymmetrischer Figuren und dem Einzeichnen von Symmetrieachsen

Götz et al. (2020) analysierten die auftretenden Fehler beim Erkennen achsensymmetrischer Figuren und beim Einzeichnen von Symmetrieachsen systematisch. Zur Auswertung typischer Fehler wurden die Häufigkeiten auftretender Fehler in Fehlerkategorien erfasst (Götz et al. 2020; vgl. auch Götz 2018).

##### 5.1.4.1 Fehler bei nicht-achsensymmetrischen Figuren

Die am häufigsten aufgetretenen Fehler bei nicht-achsensymmetrischen Figuren waren das Einzeichnen von vermeintlichen Symmetrieachsen. Darunter sind beispielsweise Geraden durch die Flügel bei drehsymmetrischen Figuren (siehe bspw. Figur Windrad; Abbildung 18), senkrecht zum Verschiebevektor verlaufende Geraden bei Schubfiguren (siehe bspw. Schubfiguren; Abbildung 19, links) vermeintliche vertikale bzw. horizontale Symmetrieachsen (siehe bspw. Fehler in Drachen; Abbildung 18) oder Diagonalen in punktsymmetrischen Figuren (bspw. Parallelogramm; Abbildung 18) (Götz 2018; Götz et al. 2020).

##### 5.1.4.2 Fehler bei achsensymmetrischen Figuren

Das Einzeichnen von Diagonalen als vermeintliche Symmetrieachsen (vgl. bspw. Parallelogramm; Abbildung 18) war ein Fehler, der auch bei achsensymmetrischen Figuren auftrat (bspw. bei rein achsensymmetrischen Figuren, wie z.B. dem Rechteck). Des Weiteren wurden

achsensymmetrische Figuren (wie bspw. achsensymmetrische Figuren und achsensymmetrische Schubfiguren) häufig als nicht achsensymmetrisch identifiziert. Darüber hinaus zeigte sich, dass in Figuren, in die mehrere Symmetrieachsen einzuzeichnen waren (achsen- und punktsymmetrische Figuren, achsen- und drehsymmetrische Figuren sowie achsen-, punkt- und drehsymmetrische Figuren), häufig nicht alle Symmetrieachsen eingezeichnet wurden (Götz et al. 2020).

### 5.1.4.3 Systematisierung auftretender Fehler

Abbildung 20 fasst die von Götz et al. (2020) berichteten Fehler, die beim Erkennen achsensymmetrischer Figuren und beim Einzeichnen von Symmetrieachsen auftreten, zusammen.

<u>Typische Fehler</u>	<u>Charakteristika der Figur</u>
Achsensymmetrie nicht erkannt	<b>achsensymmetrische Schubfiguren</b> achsensymmetrische Figuren
Fehlendes Einzeichnen von Symmetrieachsen	achsen- und drehsymmetrische Figuren achsen- und punktsymmetrische Figuren achsen-, punkt- und drehsymmetrische Figuren
Einzeichnen zusätzlicher vermeintlicher Symmetrieachsen	<b>achsen- und punktsymmetrische Figuren</b> punktsymmetrische Figuren achsensymmetrische Figuren  punktsymmetrische Figuren achsen- und punktsymmetrische Figuren  <b>Schubfiguren</b> achsensymmetrische Schubfiguren
Diagonalen als Achsen eingezeichnet	
Einzeichnen von Seitenhalbierenden	
Vermeintliche Symmetrieachse senkrecht zum Verschiebungsvektor eingezeichnet	

Abbildung 20: Zusammenfassung der vorkommenden Fehlerarten nach Arten der Symmetrieabbildungen (inkl. Parallelverschiebung). Fett gedruckt sind die Figuren, bei welchen der jeweilige Fehler am häufigsten auftritt (vgl. Götz et al. 2020, S. 545).

Abbildung 20 verdeutlicht, dass es Fehler gibt, die bei Figuren auftreten, deren Symmetrieeigenschaften durch unterschiedliche Arten von Symmetrieabbildungen inkl. Parallelverschiebung charakterisiert werden können. Diese Zusammenhänge wurden zu jeweils immer zwei unterschiedlichen Figuren statistisch untersucht. Die Auswertungen dieses Vergleichs mit Kreuztabellen (Götz et al. 2020) zeigten einen statistischen Zusammenhang für folgende Lösungen:

- Einzeichnen der Diagonale bei den Figuren Rechteck (achsen- und punktsymmetrische Figur) und Quadrat (achsen-, punkt- und drehsymmetrische Figur) ( $\chi^2(4, n=180) = 65,23, p= .000$ ; Cramers  $V= .418, p= .000$ ).
- Einzeichnen einer vermeintlichen Achse senkrecht zum Verschiebevektor bei den Figuren Doppelpes Pultdach und Doppelter Winkel (beides Schubfiguren) (vgl. Abbildung 19 (links), S. 88) ( $\chi^2(1, n=16) = 9.35, p= .005$ ; Cramers  $V= .764, p= .005$ ).
- Ankreuzen „keine Symmetrieachse“ bei den Figuren Doppelter Bogen und Doppelpes Boot (beides achsensymmetrische Schubfiguren) (vgl. Abbildung 19 (rechts), S. 88) ( $\chi^2(1, n=50) = 10.75, p= .005$ ; Cramers  $V= .464, p= .005$ ).
- fehlendes Einzeichnen von Symmetrieachsen bei den Figuren Vierstern (vgl. Tabelle 3, S. 90) und Quadrat (beides achsen-, punkt- und drehsymmetrische Figuren) ( $\chi^2(4, n=107) = 22.249, p= .000$ ; Cramers  $V= .322, p= .000$ ).

Kein signifikanter Zusammenhang zeigte sich hingegen beim Einzeichnen der Diagonalen als vermeintliche Achsen in die Figuren Rechteck und Parallelogramm ( $\chi^2(4, n=39) = 3.856, p= .476$ ) (Götz et al. 2020).

Die hier aufgezeigten, systematischen Analysen der Aufgabenbearbeitungen von Schülerinnen und Schülern zeichnen sich durch einen detailgenauen Blick auf auftretende, systematische Fehler beim Lösen von Aufgaben zur Achsenspiegelung und Achsensymmetrie aus. Diese Analysen geben erste Hinweise auf mögliche Fehlkonzepte bei Schülerinnen und Schülern bezüglich des vorhandenen Symmetrieverständnisses. Darüber hinaus werden die in diesem Unterkapitel präsentierten Ergebnisse als Ausgangspunkt für weitere detaillierte, qualitative Analysen genutzt, wie sie im folgenden Unterkapitel berichtet werden.

## 5.2 Wissen über das mathematische Denken von Schülerinnen und Schülern bei der Achsenspiegelung

Ziel dieses Forschungsschwerpunktes ist es, detaillierteres Wissen über das Denken und somit über das Verständnis von Schülerinnen und Schülern der Grundschule zu Symmetrie und Achsenspiegelung zu schaffen (Forschungsschwerpunkt 2). Dieses Wissen ist insbesondere von Bedeutung, um beispielsweise nachvollziehen zu können, welche Fehler Schülerinnen und Schüler machen und warum. Gleichmaßen spielt dieses Wissen eine Rolle, um im Unterricht entsprechend, angemessen diagnostisch Handeln zu können.

### 5.2.1 Herangehensweisen von Grundschulkindern bei der Spiegelung ebener Figuren

Die Fehler bzw. Lösungsprodukte der Schülerinnen und Schüler lassen nur vermuten, was die Schülerinnen und Schüler bei der entsprechenden Aufgabenbearbeitung gedacht haben könnten bzw. warum typische Fehler (siehe Abschnitte 2.3.3.1 und 5.1.2) entstanden sein könnten. Um detaillierte Informationen über Denkansätze und Strategien<sup>29</sup> der Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung von Symmetrieaufgaben zu bekommen, wurde eine Interviewstudie durchgeführt (Götz & Gasteiger 2022). Es zeigte sich, dass es einen Zusammenhang zwischen Herangehensweisen der Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung von Aufgaben zur Achsenspiegelung (wie beispielsweise Eigenschaften von Achsenspiegelung oder mentale Bilder) und ihren Lösungsprodukten gibt (Götz & Gasteiger 2022). Dazu wurden Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 4 (n = 42; Altersdurchschnitt = 9,84 Jahre) während ihrer Bearbeitung der folgenden vier Aufgaben zur Spiegelung ebener geschlossener Figuren an einer Achse (vgl. Abbildung 21) videografiert.

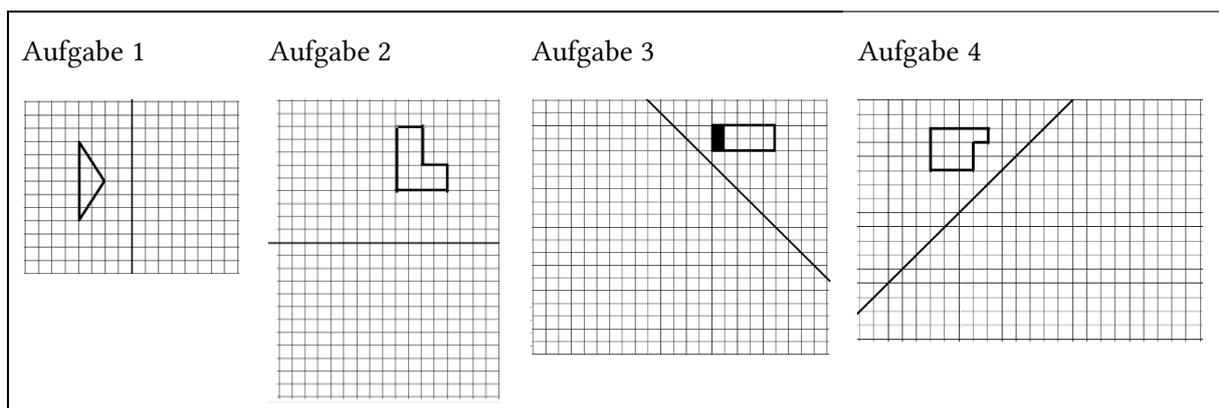


Abbildung 21: Aufgaben zur Achsenspiegelung der Studie Götz und Gasteiger (2022)

Die Schülerinnen und Schüler wurden darum gebeten, während ihres Bearbeitungsprozesses laut zu denken. Zusätzlich wurden im Anschluss an die jeweilige Aufgabenbearbeitung teilstrukturierte Interviews mit den Schülerinnen und Schülern durchgeführt, die zum Zweck hatten, weitere Informationen zum Bearbeitungsprozess und Herangehensweisen während der Aufgabenbearbeitung zu gewinnen.

---

<sup>29</sup> Diese Denkansätze und Strategien werden im Folgenden als Herangehensweisen bezeichnet.

### 5.2.1.1 Kategorienschema zur Erfassung von Herangehensweisen der Schülerinnen und Schüler bei der Achsenspiegelung

Die Erfassung der Herangehensweisen der Schülerinnen und Schüler während des Bearbeitungsprozesses dient dem Ziel, detaillierte Lernvoraussetzungen und Lernvorgänge von Schülerinnen und Schülern der Jahrgangsstufe 4 bei der Achsenspiegelung zu erfassen. Diese Herangehensweisen wurden mit Hilfe der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2014) erfasst. Da bisher kaum Wissen darüber vorliegt, wie Schülerinnen und Schüler der Grundschule überhaupt bei der Bearbeitung von Aufgaben zur Achsenspiegelung vorgehen, wurden diese anhand eines Kategoriensystems erfasst, welches theorie- und datenbasiert entwickelt wurde. Tabelle 4 bis Tabelle 7 stellen das Kategoriensystem<sup>30</sup> mit seinen einzelnen Kategorien dar (vgl. Götz & Gasteiger 2022). Für beispielhafte Schülerlösungen zu den einzelnen Unterkategorien siehe Götz und Gasteiger (2022).

Tabelle 4: Hauptkategorie "Eigenschaften der Achsenspiegelung" inkl. Unterkategorien

Unterkategorie	Definition der Kategorie
<b>Kongruenz der Seiten</b>	Eine mündliche Äußerung oder eine Handlung wird getätigt, die auf die Berücksichtigung oder Bestimmung der Kongruenz der Seiten hinweist.
<b>„Andersherum“</b>	Eine mündliche Äußerung oder eine Handlung wird getätigt, die darauf hinweist, dass das Kriterium "andersherum" beachtet wurde, was bedeutet, dass das Bild "genau umgekehrt" ist.
<b>Punkte haben Spiegelpunkte</b>	Eine mündliche Äußerung oder eine Handlung wird getätigt, die darauf hindeutet, dass die Schülerin bzw. der Schüler sich der Tatsache bewusst ist, dass die Punkte der Figur Spiegelpunkte haben. Diese Kategorie wird kodiert, wenn die Schülerin bzw. der Schüler mindestens zwei Eckpunkte (oder Punkte) der Figur durch Heranziehen dieses Kriteriums identifiziert.
<b>Entfernung bei 45°-Achsen</b>	Eine mündliche Äußerung oder eine Handlung wird getätigt, die zeigt, dass eine Berücksichtigung oder Bestimmung der Entfernung eines Punktes bzw. der Figur zur Spiegelachse stattfindet. Die Entfernung wird als eine Verbindung zwischen Punkt (Spiegelpunkt) und Achse verstanden, die nicht die kürzeste ist.
<b>Abstand bei 45°-Achsen</b>	Eine mündliche Äußerung oder eine Handlung wird getätigt, die zeigt, dass eine Berücksichtigung oder Bestimmung des Abstandes (kürzeste Entfernung) eines Punktes bzw. der Figur zu einer 45°-Achse stattfindet. Dieses Kriterium wird auch kodiert, wenn es nur auf einen Punkt der Figur (und seinen Spiegelpunkt) angewendet wird.
<b>Abstand bei vertikalen und horizontalen Spiegelachsen</b>	Eine mündliche Äußerung oder eine Handlung wird getätigt, die zeigt, dass eine Berücksichtigung oder Bestimmung des Abstandes (kürzeste Entfernung) zu einer vertikalen oder horizontalen Spiegelachse stattfindet. Dieses Kriterium wird auch kodiert, wenn es nur auf einen Punkt der Figur (und seinen Spiegelpunkt) angewendet wird.
<b>Abstand zum Rand</b>	Eine mündliche Äußerung oder eine Handlung wird getätigt, die zeigt, dass eine Berücksichtigung oder Bestimmung des Abstandes bzw. der Entfernung zum Rand des Blattes oder des Kästchengitters bzw. Punkterasters stattfindet.

<sup>30</sup> Dabei handelt es sich in Teilen um eine Weiterentwicklung bzw. Vertiefung der Kriterien, die von Ramful et al. (2015) erfolgte.

Tabelle 5: Hauptkategorie "Ganzheitliche Herangehensweisen" inkl. Unterkategorien

Unterkategorie	Definition der Kategorie
<b>Holistisches Vorgehen</b>	Eine mündliche Äußerung oder eine Handlung wird getätigt, die darauf hinweist, dass die Schülerin bzw. der Schüler das Spiegelbild im Sinne von "das muss da hin" zu zeichnen scheint. Ohne sichtbare Kriterien wie z. B. die Kongruenz der Seiten anzuwenden, scheint die Schülerin bzw. der Schüler visuell und/oder gedanklich zu wissen, "wie die Form aussehen muss".
<b>Kongruenz der Gesamtfigur</b>	Eine mündliche Äußerung oder eine Handlung wird getätigt, die darauf hinweist, dass die Figur und Bildfigur die gleiche Form haben müssen ("gleich aussehen"). Figur und Bildfigur werden als Ganzes gesehen; einzelne Eigenschaften der Figur/ Bildfigur werden in diesem Zusammenhang nicht erwähnt.

Tabelle 6: Hauptkategorie "Gesten und Handlungen, die den Spiegelungsprozess veranschaulichen" inkl. Unterkategorien

Unterkategorie	Definition der Kategorie
<b>Drehen des Blattes</b>	Eine Handlung wird durchgeführt, bei der das Blatt zur Bearbeitung der Aufgabe gedreht wird. Dieses Kriterium wird nicht kodiert, wenn das Blatt nur kurz gedreht wurde, um das Zeichnen eines Liniensegments der Bildfigur zu erleichtern.
<b>Geste: Falten</b>	Eine Handlung mit einer Bewegung wird durchgeführt... <ul style="list-style-type: none"> <li>• die einer Faltbewegung ähnelt (z. B. eine Hand faltet von links nach rechts oder umgekehrt).</li> <li>• bei der beide Hände zusammengelegt werden, um die Faltbewegung zu imitieren.</li> </ul> Zu dieser Unterkategorie gehören auch die sehr wenigen Bewegungen, aus denen deutlich wird, dass die Form um einen bestimmten Punkt gedreht ist.
<b>Geste: Spiegeln</b>	Eine Handlung wird durchgeführt... <ul style="list-style-type: none"> <li>• bei der das Lineal oder das Geodreieck auf die Achse gesetzt wird, um einen Spiegel zu imitieren bzw. um den Vorgang des Spiegeln zu veranschaulichen oder zu erklären.</li> <li>• in der der Spiegel bzw. das Spiegeln mit den Händen und/oder einer Geste des Spiegeln dargestellt wird.</li> </ul>
<b>Lineal als Spiegel</b>	Es wird eine Handlung durchgeführt, bei der das Lineal bzw. Geodreieck auf die Spiegelachse gestellt und als Mira-Spiegel (transparenter Spiegel) verwendet wird. Die Spiegelung der Figur im Lineal/ Geodreieck wird verwendet, um die Position der Bildfigur zu erkennen.

Tabelle 7: Hauptkategorie "Mentale Bilder, die den Spiegelungsprozess veranschaulichen" inkl. Unterkategorien

Unterkategorie	Definition der Kategorie
<b>Gedankliches Falten</b>	Eine mündliche Äußerung wird getätigt, die darauf hinweist, dass die Schülerin/ der Schüler sich während der Aufgabenbearbeitung/ bei der Beantwortung einer Frage ein gedankliches Falten vorstellt, um die Aufgabe zu lösen.
<b>Gedankliches Spiegeln</b>	Eine mündliche Äußerung wird getätigt, die darauf hinweist, dass die Schülerin/ der Schüler sich während der Aufgabenbearbeitung/ bei der Beantwortung einer Frage ein gedankliches Spiegeln vorstellt, um die Aufgabe zu lösen.

Welche Kriterien Schülerinnen und Schüler verwenden, wurde anhand des dargestellten – und in der Studie von Götz und Gasteiger (2022) herausgearbeiteten – Kategoriensystems erhoben und wird im Folgenden berichtet.

### 5.2.1.2 Deskriptive Häufigkeiten zu den von den Schülerinnen und Schülern herangezogenen Kriterien

Die Anwendung des Kategorienschemas zur Analyse der Bearbeitungen bzw. Vorgehensweisen der Schülerinnen und Schüler zeigte, dass vor allem Kriterien der Hauptkategorie „Eigenschaften der Achsenspiegelung“ und insbesondere die des *Abstandes* und der *Kongruenz der Seiten* herangezogen werden (vgl. Abbildung 22).

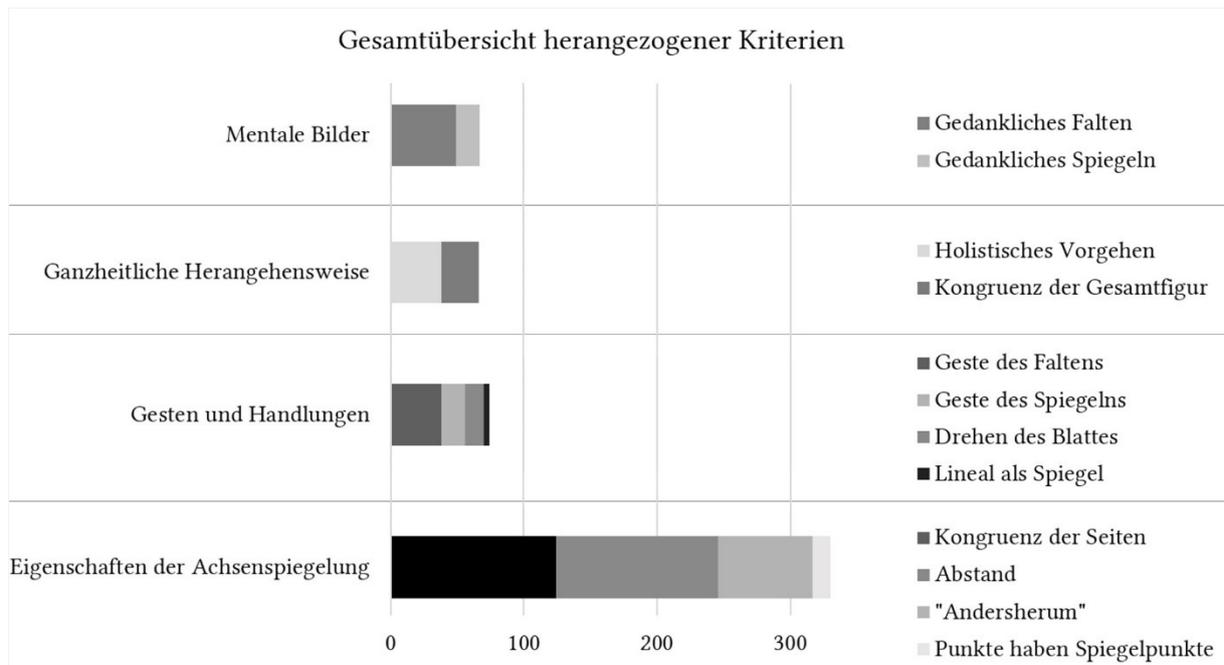


Abbildung 22: Gesamtübersicht der Herangehensweisen bei der Bearbeitung der Aufgaben zur Achsenspiegelung

Um aufgabenspezifische Unterschiede herauszuarbeiten, wurden alle in den Bearbeitungen der Schülerinnen und Schüler herangezogenen Kriterien für jede Aufgabe im Detail betrachtet (vgl. auch Götz & Gasteiger 2022, Fig. 2).

**Eigenschaften der Achsenspiegelung.** Bezüglich der Hauptkategorie „Eigenschaften der Achsenspiegelung“ wurden die *Kongruenz der Seiten* und der *Abstand zur Spiegelachse* in allen vier Aufgaben herangezogen. Von besonderem Interesse war an dieser Stelle die Unterscheidung der unterschiedlichen Unterkategorien, in die das Kriterium *Abstand* zu unterscheiden ist (vgl. Kategoriensystem, Abschnitt 5.2.1.1). Bei Achsenspiegelungen an vertikalen oder horizontalen Achsen entsprechen sich Abstand und Entfernung eines Punktes bzw. Bildpunktes zur Spiegelachse – aus diesem Grund wird für die Aufgaben 1 und 2 hier nicht zwischen Abstand und Entfernung unterschieden. Für Aufgaben an 45°-Achsen (Aufgaben 3 und 4 dieser Studie; siehe Abbildung 21) ist die Unterscheidung dieser beiden Kategorien von

Bedeutung. In Aufgabe 3 zogen nur fünf von 28 Schülerinnen und Schülern den Abstand und nicht die Entfernung zur Achse als Kriterium heran, in Aufgabe 4 waren es nur zwei von 26 Schülerinnen und Schülern (Götz & Gasteiger 2022).

**Ganzheitliche Herangehensweisen.** Auffällig bei den absoluten Häufigkeiten bezüglich der beiden Unterkategorien *holistisches Vorgehen* und *Kongruenz der Gesamtfigur* dieser Hauptkategorie ist, dass insbesondere bei der Aufgabe mit der Figur, deren Seiten das Kästchengitter „irgendwie“ schneiden („schräge Linien“) (Aufgabe 1, siehe Abbildung 21) *holistisches Vorgehen* vermehrt auftrat. Dies ist insbesondere von Interesse, da bei dieser Aufgabe die Anzahl der Schülerinnen und Schüler, die die *Kongruenz der Seiten* bei der Bearbeitung heranziehen, deutlich geringer war, als bei den anderen drei Aufgaben, bei denen die Figuren keine schrägen Linien aufweisen (siehe Abbildung 21) (Götz & Gasteiger 2022).

**Mentale Bilder, die den Spiegelungsprozess veranschaulichen.** Die Auswertung der absoluten Häufigkeiten des Heranziehens „Mentaler Bilder“ der Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung der Aufgaben zeigt, dass insgesamt bei allen Aufgaben mehr das *gedankliche Spiegeln* als das *gedankliche Falten* herangezogen wurde. Ebenso zeigte sich, dass mit steigender Schwierigkeit der Aufgabe, insgesamt tendenziell mehr auf „Mentale Bilder, die den Spiegelungsprozess veranschaulichen“ zurückgegriffen wurde (Götz & Gasteiger 2022).

**Gesten und Handlungen, die den Spiegelungsprozess veranschaulichen.** Auch bei der Auswertung der Hauptkategorie „Gesten und Handlungen, die den Spiegelungsprozess veranschaulichen“ wurde die *Geste des Spiegeln*s häufiger als die *Geste des Falten*s in den Bearbeitungen der Schülerinnen und Schüler identifiziert. Das Heranziehen dieser beiden Gesten fand häufiger bei Spiegelungen an 45°-Achsen als bei Spiegelungen an vertikalen oder horizontalen Achsen statt. Das *Drehen des Blattes* zur Bearbeitung der Aufgaben und die *Verwendung des Lineals als Spiegel* wurde nur selten bzw. nur bei einer Schülerin (allerdings bei allen Aufgaben) beobachtet (Götz & Gasteiger 2022).

### 5.2.1.3 Zusammenhänge zwischen Lösungsprodukt und Herangehensweisen

Von besonderem Interesse waren in der Studie von Götz und Gasteiger (2022) die Zusammenhänge zwischen dem Lösungsprodukt und der im Lösungsprozess von den Schülerinnen und

Schülern genutzten Herangehensweisen (Forschungsdesiderat 6). Um Zusammenhänge herauszuarbeiten, wurden die Lösungsprodukte der Schülerinnen und Schüler nach typischen Fehlern kodiert (vgl. Ergebnisse 5.1.2.1)<sup>31</sup>(vgl. Götz & Gasteiger 2022):

- Inkorrekte Spiegelung: Spiegelung an der gegebenen Achse, jedoch Position der Bildfigur nicht korrekt
- Inkorrekte Spiegelung: Verschiebung der Figur auf die andere Seite der Spiegelachse
- Inkorrekte Spiegelung: Spiegelung an einer gedachten vertikalen Achse
- Inkorrekte Spiegelung: Spiegelung an einer gedachten horizontalen Achse<sup>32</sup>
- Inkorrekte Spiegelung: Spiegelung an einer gedachten vertikalen Achse und Verschiebung der Figur ODER Drehung der Figur um ein Drehzentrum
- Korrekte Spiegelung

Schülerinnen und Schüler, die bei der gleichen Aufgabe zum gleichen Lösungsprodukt kamen, wurden zu Gruppen zusammengefasst. Diese Gruppen mit gleichen Lösungsprodukten wurden dann in Zusammenhang mit den Herangehensweisen bei der Bearbeitung gebracht. Die Ergebnisse der detaillierten Analyse der Studie von Götz und Gasteiger (2022) werden im Folgenden zusammengefasst. Hinsichtlich dieser Zusammenhänge war davon auszugehen, dass die von den Schülerinnen und Schülern verwendeten Herangehensweisen ein jeweils mehr oder weniger tiefes, mathematisches Verständnis der Achsenspiegelung offenbaren.<sup>33</sup>

**Spiegelung an der gegebenen Achse, jedoch Position der Bildfigur nicht korrekt.** Dieses Lösungsprodukt wurde nur bei Aufgaben an vertikalen und horizontalen Achsen identifiziert. Schülerinnen und Schüler, die zu diesem Lösungsprodukt kamen, zogen im Vergleich zu anderen Lösungsprodukten häufiger „Ganzheitliche Herangehensweisen“ heran. Insbesondere das *holistische Vorgehen* konnte häufiger in der Aufgabe mit der Figur mit schrägen Linien (Aufgabe 1, vgl. Abbildung 21, S. 94) als in Aufgaben ohne schräge Linien (Aufgabe 2) beobachtet werden. Im Vergleich zu anderen Lösungsprodukten, die bei diesen Aufgaben vorkamen, wurde die *Kongruenz der Seiten* bei der Bearbeitung seltener herangezogen (Götz & Gasteiger 2022).

---

<sup>31</sup> Für eine genaue Beschreibung der Häufigkeiten der einzelnen Fehler siehe Götz und Gasteiger (2022).

<sup>32</sup> Da es zu diesem Lösungsprodukt nur sehr wenige Fälle gibt, wird dieses Lösungsprodukt im Folgenden gemeinsam mit dem Lösungsprodukt *Spiegelung an einer gedachten vertikalen Achse* betrachtet.

<sup>33</sup> Für eine detaillierte Analyse des Zusammenhangs zwischen den Herangehensweisen der Schülerinnen und Schüler in den verschiedenen Aufgaben und ihrer Lösungsprodukte siehe Götz und Gasteiger (2022, Table 7).

**Verschiebung der Figur auf die andere Seite der Spiegelachse.** Über alle Aufgaben hinweg zeigte sich, dass die *Kongruenz der Seiten* sehr häufig in den Bearbeitungen herangezogen wurde, die zu verschobenen Figuren führten – wohingegen der *Abstand* bzw. die *Entfernung* selten herangezogen wurden. Schülerinnen und Schüler, die die Figur verschoben, zogen häufig ebenso „Ganzheitliche Vorgehensweisen“ heran. Insbesondere bei der Aufgabe mit schrägen Linien (vgl. Abbildung 21, S. 94, Aufgabe 1) konnte ein *holistisches Vorgehen* bei der Hälfte aller Schülerinnen und Schüler, die die Figur verschoben, identifiziert werden (Götz & Gasteiger 2022). In den Aufgaben an 45°-Achsen (vgl. Abbildung 21, S. 94, Aufgaben 3 und 4) zeigten die Bearbeitungsprozesse der Schülerinnen und Schüler häufig einen Bezug zur *Kongruenz der Gesamtfigur*. Bei diesen Aufgabenbearbeitungen wurden insgesamt kaum „Gesten und Handlungen, die den Spiegelungsprozess veranschaulichen“ oder „Mentale Bilder, die den Spiegelungsprozess veranschaulichen“ herangezogen – ausgenommen bei Aufgabe 3 (Götz & Gasteiger 2022).

**Spiegelung an einer gedachten vertikalen bzw. horizontalen Achse.** Dieses Lösungsprodukt trat nur bei Aufgaben mit 45°-Achsen auf. Die *Kongruenz der Seiten* und die *Entfernung* (nicht *Abstand*) zur 45°-Achse wurden von sehr vielen Schülerinnen und Schülern bei der Bearbeitung herangezogen, die eine Spiegelung an einer gedachten vertikalen bzw. horizontalen Achse erkennen ließen (Götz & Gasteiger 2022). Im Vergleich zum Lösungsprodukt „Verschiebung der Figur auf die andere Seite der Achse“ konnte bei diesen Lösungsprodukten häufig auch die Herangehensweise „*Andersherum*“ in den Bearbeitungen identifiziert werden. Auffällig ist zusätzlich, dass in den Lösungsprozessen der Schülerinnen und Schüler häufiger als bei anderen Lösungsprodukten eine *Geste des Spiegeln*s oder *gedankliches Spiegeln* identifiziert werden konnte (Götz & Gasteiger 2022).

**Spiegelung an einer gedachten Achse und Verschiebung der Figur oder Drehung der Figur um ein Drehzentrum.** Dieses Lösungsprodukt trat ebenfalls nur bei Aufgaben mit 45°-Achsen auf. Verglichen mit dem Lösungsprodukt Spiegelung an einer gedachten vertikalen bzw. horizontalen Achse zeigten sich ähnlich hohe relative Häufigkeiten bezüglich des Heranziehens der *Kongruenz der Seiten* (Götz & Gasteiger 2022). In allen Lösungsprozessen, die zu diesem Lösungsprodukt führen, wurde die Herangehensweise „*Andersherum*“ beachtet. Bezüglich der relativen Häufigkeiten der Hauptkategorien „Gesten und Handlungen, die den Spiegelungsprozess veranschaulichen“ sowie „Mentale Bilder, die den Spiegelungsprozess veranschaulichen“ zogen die Schülerinnen und Schüler bei Aufgabe 3 (siehe Abbildung 21, S. 94) häufiger das *Spiegeln (mental oder als Geste)* heran und bei Aufgabe

4 (siehe Abbildung 21, S. 94) überwiegend das *Falten (mental oder als Geste)* (Götz & Gasteiger 2022). In den Bearbeitungsprozessen zu diesem Lösungsprodukt konnte bei einigen Schülerinnen und Schülern das Heranziehen des *Abstands zur 45°-Achse* identifiziert werden. Dabei ist dies das einzige Lösungsprodukt (unter allen beschriebenen inkorrekten Lösungsprodukten (s.o.)), bei dem der *Abstand zur 45°-Achse* herangezogen wurde (Götz & Gasteiger 2022).

**Korrekte Spiegelung.** Die meisten Schülerinnen und Schüler, die korrekt spiegelten, beachteten die *Kongruenz der Seiten* und den *Abstand zur vertikalen/ horizontalen bzw. 45°-Achse*. Ebenso wurden in den korrekten Lösungsprodukten häufiger als in anderen Lösungsprodukten die Herangehensweisen *Punkte haben Spiegelpunkte* (Aufgaben mit schrägen Linien und an 45°-Achsen) und *Drehen des Blattes* (Aufgaben an 45°-Achsen) in den Bearbeitungen genutzt (Götz & Gasteiger 2022). Ganzheitliche Herangehensweisen konnten bei richtigen Lösungsprodukten nur bei Aufgabe 1 identifiziert werden. Eine Schülerin löste die Aufgaben 2 bis 4, indem sie ihr *Lineal als Spiegel* benutzte. Mit Ausnahme von Aufgabe 3, glichen die relativen Häufigkeiten bezüglich des *Gedanklichen Spiegelns* und der *Geste des Spiegelns* denen der anderen Lösungsprodukte. In Aufgabe 4 wurden die Herangehensweisen *Geste des Faltens*, *gedankliches Falten* und *gedankliches Spiegelns* herangezogen (Götz & Gasteiger 2022).

## 6 Diskussion

In dieser Arbeit wurde theoriebasiert erarbeitet, welche Facetten professionellen Wissens beim Unterrichten der Inhalte Symmetrie und Achsenspiegelung in der Grundschule von Bedeutung sind. Zu einzelnen Facetten professionellen Wissens wurden Forschungsdesiderate formuliert, welche den Ausgangspunkt der empirischen Studien dieser Arbeit bildeten. Die durchgeführten Studien dienten dem Ziel gemäß einzelner Facetten, Wissen zu generieren, welches bisher bezüglich der einzelnen Facetten noch in sehr wenigen Studien untersucht wurde, nicht immer grundschulspezifisch ausdifferenziert vorlag sowie Ergebnisse vorheriger Studien noch zu wenig empirisch belegt sind. In Kapitel 5 wurden die Ergebnisse der durchgeführten Studien dargestellt. Resümierend folgt an dieser Stelle – nach einer kritischen Reflexion – eine zusammenfassende Diskussion. Anschließend erfolgt eine Einordnung der Ergebnisse bezüglich der Facetten professionellen Wissens von Lehrerinnen und Lehrern in der Grundschule (vgl. auch Forschungsdesiderate).

### 6.1 Kritische Reflexion der Studien

Die zu dieser Arbeit durchgeführten Studien stellen eine Erweiterung der Wissensgrundlage zu verschiedenen Facetten professionellen Wissens für das Unterrichten der Inhalte Symmetrie und Achsenspiegelung in der Grundschule dar. Bevor die Ergebnisse der Studien im Detail diskutiert werden, werden an dieser Stelle einige Limitationen und methodische Einschränkungen aufgeführt, die für die Interpretation der Ergebnisse in Betracht gezogen werden müssen. Im Detail sind diese in den jeweiligen Publikationen berichtet.

#### 6.1.1 Stichprobe

Aufgaben, die zur Analyse schwierigkeitsgenerierender Merkmale bei der Achsenspiegelung ausgewertet wurden, waren im Design der Pilotierungsstudien der Vergleichsarbeiten des Instituts zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) enthalten (Götz & Gasteiger 2019). Da im Testdesign der Pilotierungsstudien der Vergleichsarbeiten weitere Inhaltsbereiche und Kompetenzen abgeprüft werden sowie die verwendeten Aufgaben aus Erhebungen unterschiedlicher Jahre stammen, stellten die Aufgaben zur Achsenspiegelung nur einen Teil der Gesamtzahl an Aufgaben der Pilotierungsstudie dar. Das in den Pilotierungsstudien der Vergleichsarbeiten eingesetzte Multi-Matrix-Design hatte zur Folge, dass nicht alle Schülerinnen und Schüler alle Aufgaben zur Achsenspiegelung bearbeiteten. Dies hatte zur Folge, dass

keine individuumsbezogene Auswertung möglich war, d. h. keine interne Konsistenz bzw. Tendenz in den Aufgabenbearbeitungen bzw. den Lösungsprodukten ermittelt werden konnte.

### 6.1.2 Studiendesign

Detaillierte Fehleranalysen der Studien, die mit dieser Arbeit durchgeführt wurden, erlaubten es, präzise Aussagen zu typischen Fehlern von Schülerinnen und Schülern in der Grundschule bzw. in der Sekundarstufe zu treffen. Aussagen zu systematischen Fehlern, also Fehlern, die nach Käser (2011) *individuelle* Leistungen eines Kindes charakterisieren, können auf Basis der hier vorliegenden Erkenntnisse nicht getroffen werden. Zukünftige Forschungsprojekte sollten daher zum Ziel haben, Wissen zu systematischen Fehlern in Form von Längsschnittdaten zu erheben, um Erkenntnisse zu individuellen Lernprozessen zu generieren. Auf dieser Basis könnte im Unterricht an den aktuellen Lernprozess einzelner Schülerinnen und Schüler angeknüpft und somit ein solider Wissensaufbau ermöglicht werden (Spychinger et al. 1999).

### 6.1.3 Testinstrumente

Zur Erhebung des Einflusses von Merkmalen ebener Figuren auf das Erkennen von Achsensymmetrie wurde in der Studie von Götz et al. (2020) ein Testinstrument verwendet, welches Aufgaben zu allen Arten von Symmetrieabbildungen inklusive Parallelverschiebung (vgl. Abschnitt 5.1.4) enthielt. Theoretische und empirische Befunde, die im Vorhinein gesichtet wurden, gaben lediglich Hinweise darauf, dass die Punktsymmetrie einen Einfluss auf das Erkennen von Achsensymmetrie und das Einzeichnen von Symmetrieachsen in ebene Figuren hat. Bei der Planung der Studie wurde jedoch in Betracht gezogen, dass auch weitere Arten von Symmetrieabbildungen einer Figur eine Rolle bei der Aufgabenbearbeitung spielen könnten, weshalb auch diese in den Aufgabenpool aufgenommen wurden. Dieser Entschluss hatte jedoch zur Folge, dass zu allen Arten von Symmetrieabbildungen inkl. Parallelverschiebung nur zwei bzw. drei Figuren in den Testinstrumenten enthalten waren. Aus diesem Grund konnten keine statistischen Zusammenhänge des Einflusses der Aufgabenmerkmale (Ausrichtung der Achse, Art der Symmetrie der Figur, Anzahl der Symmetrieachsen) auf die Aufgabenbearbeitung durchgeführt werden. Eine erneute Durchführung der Studie sollte insbesondere auf einer breiteren Aufgabenanzahl basieren.

#### 6.1.4 Aufgabenmaterial

Aus der oben genannten Integration der Aufgaben zur Achsenspiegelung in das Design der Pilotierungsstudien, ergab sich, dass zwar einige Aufgabenmerkmale systematisch erhoben werden konnten, doch wäre eine noch breitere Variation der Merkmale über mehr Aufgaben wünschenswert gewesen. Dies hätte es erlaubt, die durchgeführten Vergleiche von Aufgabenpaaren an mehreren Beispielen durchzuführen. Unter diese Einschränkungen in der Variation der Merkmale fällt zum Beispiel auch, dass bei der Erhebung des Merkmals des Untergrundes nur die Merkmalsausprägungen Kästchengitter und Punkteraster aufgenommen werden konnten. Grund hierfür war, dass im Rahmen der Vergleichsarbeiten die Auswertungsanleitungen eindeutig sein mussten. Aufgaben zur Spiegelung auf Blankopapier sind aus diesem Grund nicht möglich gewesen, da ein eindeutiger Toleranzbereich der Zeichnungen der Schülerinnen und Schüler einen zu erheblichen Korrekturaufwand dargestellt hätte. Bezüglich der Vermutungen zum Untergrund Blankopapier (vgl. Küchemann 1981; Grenier 1985a) konnten deshalb keine neuen Erkenntnisse gewonnen werden.

Die Auswahl der in den Studien von Götz und Gasteiger (2019) sowie Götz et al. (2020) verwendeten Aufgaben fand auf Basis theoretischer und empirischer Befunde statt. Dennoch sind bezüglich der Aufgabenauswahl einige Punkte zu nennen, die bei einer erneuten Durchführung der Studien beachtet werden sollten. Bei der Auswahl der Aufgaben zur Achsenspiegelung an 45°-Achsen wurde versucht, einfache ebene geschlossene Figuren zu verwenden (wie bspw. Rechtecke), um die Aufgabenschwierigkeiten besser beurteilen zu können. Jedoch bedingte diese Einfachheit – welche zunächst für die Beurteilung der Aufgabenschwierigkeiten sehr hilfreich war –, dass im Auswertungsschritt der Analyse typischer Fehler manche Lösungsprodukte nicht voneinander unterschieden werden konnten (vgl. Beispiel Rechteck in Abbildung 12, S. 84). In den darauffolgenden Erhebungen, welche die Analyse der Fehler bzw. der Lösungsprodukte der Schülerinnen und Schüler in den Fokus rückten, wurden diese Aufgaben abgeändert, wodurch differenziertere Aussagen zu den Lösungsprodukten möglich wurden. Auch bei der Auswahl der Aufgaben zu den Schubfiguren in der Studie von Götz et al. (2020) wurde speziell auf die Figurwahl geachtet, indem beide Teilfiguren in der Gesamtfigur deutlich erkennbar sind. Aus diesem Grund hatten Schubfiguren nicht nur Außenlinien, sondern auch durch die Figur verlaufende Linien. Diese Linien waren möglicherweise so prägnant, dass sie das Einzeichnen von Achsen beeinflussten. Ein weiterer kritischer Punkt ist, dass die Figuren dieser Studie so ausgewählt wurden, dass sie relativ einfach, jedoch auch nicht zu bekannt sein sollten, um Wissen zu Vorstellungen zur Achsensymmetrie zu erfassen

und nicht Reproduktion. Die deutlich besseren Lösungsquoten des Quadrats im Vergleich zu anderen Aufgaben mit ähnlich vielen einzuzeichnenden Achsen (Tabelle 3, S. 90) weisen darauf hin, dass es an dieser Stelle gegebenenfalls nicht sehr sinnvoll war, eine den Schülerinnen und Schülern so bekannte Figur vorzulegen. Es ist durchaus denkbar, dass in erster Linie erlerntes Wissen reproduziert wurde.

## 6.2 Interpretation der Ergebnisse zum Inhaltsbereich Achsenspiegelung

Ein zentrales Anliegen dieser Arbeit war es, Wissen zu generieren, welches zum Unterrichten des Inhaltsbereiches Achsenspiegelung in der Grundschule hilfreich oder notwendig ist. In den einzelnen Studien dieser Arbeit wurden schwierigkeitsgenerierende Aufgabenmerkmale (Forschungsdesiderat 3; vgl. Götz & Gasteiger 2019), typische Fehler (Forschungsdesiderat 4; Götz & Gasteiger 2018a, 2018b; Götz 2020; Götz & Schulz 2018) und Herangehensweisen, die Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung von Aufgaben zur Achsenspiegelung nutzen (Forschungsdesiderat 6; Götz & Gasteiger 2022), analysiert. Um herauszuarbeiten, wie die Einzelergebnisse der Studien zusammen eine neue Wissensbasis für das Unterrichten des Inhalts Achsenspiegelung formen, werden die Erkenntnisse der Studien im Folgenden in einer Zusammenschau gemeinsam diskutiert. Abschließend werden in diesem Unterkapitel aus den Analysen der Zusammenhänge zwischen schwierigkeitsgenerierenden Merkmalen, Fehlern und Herangehensweisen, die für die Bearbeitung herangezogen werden, Schlussfolgerungen auf das zugrundeliegende Verständnis von Achsenspiegelungen der Grundschülerinnen und -schüler gezogen.

### 6.2.1 Synthese der Ergebnisse zur Achsenspiegelung – diskutiert entlang schwierigkeitsgenerierender Aufgabenmerkmale

Systematische Erkenntnisse zu schwierigkeitsgenerierenden Merkmalen werden als Ausgangspunkt genommen, um daran entlang die in dieser Studie generierte Wissensbasis zum Verständnis von Schülerinnen und Schülern zur Achsenspiegelung zu diskutieren: Fehler von Schülerinnen und Schülern und Herangehensweisen, die sie für die Bearbeitung der Aufgabenstellungen nutzen, stehen in einem engen Zusammenhang mit schwierigkeitsgenerierenden Aufgabenmerkmalen. Gleichmaßen können die von den Schülerinnen und Schülern gemachten Fehler Rückschlüsse auf die Schwierigkeit von Aufgaben geben; Herangehensweisen, die die Schülerinnen und Schüler während der Bearbeitung verwenden, geben wiederum Aufschluss über Hintergründe für das Entstehen von Fehlern.

Die **Lage der Achse** konnte in der Studie von Götz und Gasteiger (2019) als schwierigkeitsgenerierendes Merkmal bei der Achsenspiegelung bestätigt werden (vgl. auch Bornstein & Stiles-Davis 1984; Schmidt 1986; Küchemann 1981; Grenier 1985a, 1985b). Es hat sich gezeigt, dass Aufgaben an 45°-Achsen den Schülerinnen und Schülern Schwierigkeiten bereiten (vgl. Abschnitt 5.1.1.1). Im Folgenden werden häufige Fehler, die sich aus der Lage der Achse ergeben, berichtet und vor dem Hintergrund genutzter Herangehensweisen sowie allgemeiner pädagogisch-psychologischer Lernvoraussetzungen diskutiert.

Auffälligste Fehler bei der Spiegelung nicht anliegender Figuren an 45°-Achsen sind die „Verschiebung der Figur“ oder die „Spiegelung der Figur an einer gedachten vertikalen Achse“ (vgl. Abschnitt 5.1.2.1; auch Küchemann 1981). Weiterhin tritt in der Grundschule der Fehler der „Mitspiegelung der Achse“ bei Aufgaben mit anliegenden und nicht-anliegenden Figuren an 45°-Achsen auf (Götz & Gasteiger 2018a, 2018b; Götz & Schulz 2018; vgl. auch Abschnitte 5.1.2.1 und 5.1.2.2).

Eine nähere Analyse der Schülerfehler „Spiegelung an einer gedachten vertikalen Achse“ und „Mitspiegelung der Achse“ zeigte, dass die gedachte vertikale Achse einer gedachten vertikalen Faltkante des zugrundeliegenden Kästchengitters entsprechen könnte und die eigentliche Achse der Aufgabenstellung ignoriert (Götz & Gasteiger 2019) bzw. sogar mitgespiegelt wurde (vgl. Abschnitte 5.1.2.1 und 5.1.2.2). Die Schülerinnen und Schüler scheinen in diesen Fällen das zugrundeliegende Kästchenpapier mittig vertikal (vgl. Abbildung 11, *Mitspiegelung der Achse an gedachter vertikaler Achse*, S. 82) oder durch die Ecken des Kästchengitters (vgl. Abbildung 11, *Mitspiegelung der Achse an gedachter Faltkante des Blattes*, S. 82; vgl. auch Abbildung 15, S. 86) gedanklich zu falten/ zu spiegeln. Eine mögliche Ursache dieser Fehler bei der Spiegelung an 45°-Achsen ist darin zu sehen, dass handlungsgebundene Verfahren zum Herstellen oder Prüfen von Achsensymmetrie, wie z. B. Klecksbilder, Faltschnitte oder das Verwenden eines Spiegels, im Unterricht meist so durchgeführt werden, dass die Achse vertikal zum Blattrand bzw. auch zum Betrachter liegt. Die Vermutung, dass Schülerinnen und Schüler das Kästchengitter gedanklich falten, wird unterstützt durch die Erkenntnis, dass viele Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 4 *Gesten des Spiegels* bei der Bearbeitung von Aufgaben zur Achsenspiegelung heranziehen (wie beispielsweise das Nachahmen eines Spiegels mit der Hand) (Götz & Gasteiger 2022) – dabei wird die Hand u. a. auch bei der Spiegelung an 45°-Achsen auf eine gedachte vertikale Faltlinie gestellt (vgl. Abschnitt 4.2.1).

Die Fehler der „Verschiebung der Figur“ und „Spiegelung an einer gedachten vertikalen Achse“ bei Aufgaben mit nicht-anliegenden Figuren treten sowohl in der Grundschule als auch in der Sekundarstufe auf. Diese Fehler geben Anlass zu vermuten, dass nicht allein das Wissen zu Symmetrie und Achsenspiegelung, sondern auch andere Faktoren, wie z. B. Fähigkeiten im Bereich des räumlichen Denkens eine Rolle bei der Bearbeitung der Aufgaben spielen könnten (vgl. Abschnitt 2.4.1). Die Dominanz der vertikalen bzw. horizontalen Achse (und vor allem die Häufigkeit des Auftretens dieser Fehler in Jahrgangsstufe 3 bzw. 4) kann zum einen durch die Symmetrie des visuellen Systems selbst und zum anderen durch die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kind erklärt werden (Piaget, Inhelder und Szeminska 1974). Spiegelungen an vertikalen Achsen fallen vermutlich deshalb leichter, da eine vertikale Achse der Symmetrie des visuellen Systems selbst, also der Ausrichtung unseres Sehens bzw. der Wahrnehmung entspricht, mit welcher der Mensch auch im täglichen Leben häufig zu tun hat wie bspw. die in unserem Alltag sehr präsente Schriftsprache, die (ebenso wie die vertikale Achse) eine links-rechts Ausrichtung hat (Boswell 1976; siehe auch Corbalis & Roldan 1974). Spiegelungen an 45°-Achsen stellen hingegen einen höheren Anspruch an die mentale Vorstellungsfähigkeit: Bei der Spiegelung an 45°-Achsen entspricht der Bezugsrahmen nicht mehr dem unseres visuellen Systems bzw. nicht mehr dem des Betrachters der Aufgabe (vgl. Piaget et al. 1974). Somit erfordert die Spiegelung an 45°-Achsen den Wechsel des Bezugsrahmens, um zu einem korrekten Ergebnis zu kommen. Die Fähigkeit den Bezugsrahmen zu wechseln (weg von der eigenen Sicht) entwickelt sich erst gegen Ende des konkret-operationalen Stadiums beim Kind (Piaget & Inhelder 1971). Auf den ersten Stufen der von Piaget et al. (1974) beschriebenen Entwicklung des räumlichen Denkens sind Kinder noch nicht in der Lage den Bezugsrahmen zu wechseln. Interessant ist an dieser Stelle das Ergebnis von Götz und Gasteiger (2022), dass einige Schülerinnen und Schüler scheinbar ihre eigene Strategie haben, den Bezugsrahmen zu ändern: Einige Schülerinnen und Schüler drehen das Blatt zur Bearbeitung der Aufgaben und es gelingt ihnen dadurch, die Aufgaben korrekt zu lösen. Kritischer als bei Grundschülerinnen und -schülern ist jedoch die Wahl des falschen Bezugsrahmens von Schülerinnen und Schülern der Jahrgangsstufe 7 zu sehen (vgl. Fehler „Spiegelung an einer vertikalen Achse“, Abschnitt 5.1.2.1). Auch wenn die Fehler „Verschiebung der Figur“ und „Spiegelung an einer gedachten vertikalen Achse“ bei Aufgaben mit nicht-anliegenden Figuren in der Sekundarstufe deutlich seltener auftreten als in der Primarstufe (Götz 2020; vgl. Abschnitt 5.1.2), so machen doch über ein Drittel aller befragten Schü-

lerinnen und Schüler einen dieser Fehler. Entsprechend der Entwicklung kognitiver Fähigkeiten nach Piaget et al. (1974) und der Entwicklung des Begriffsverständnisses nach Kirsche (1992) bezüglich der Achsensymmetrie wäre davon auszugehen, dass Schülerinnen und Schüler im Sekundarstufen-Alter in ihrer Entwicklung auf einem höheren Niveau sein sollten als Kinder im Grundschulalter. Es scheint demnach so, als hätte in der Sekundarstufe eine fortgeschrittene Loslösung von kinematischen Vorstellungen nur bei zwei Drittel der hier untersuchten Schülerinnen und Schüler stattgefunden.

Eine weitere Erklärung für die Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler bei Spiegelungen an 45°-Achsen könnte darin vermutet werden, dass auch das Heranziehen des „Abstands“ bei Aufgaben mit nicht anliegenden Figuren eine schwierigkeitsgenerierende Funktion hat. Beim Heranziehen des „Abstands“ im Allgemeinen wurde bei nicht anliegenden Figuren überwiegend die „Entfernung zur Achse“ und nicht der „Abstand zur Achse“ beachtet (vgl. Götz & Gasteiger 2022, Abschnitt 6.2.1.2) und somit die Aufgabe nicht korrekt gelöst. Aufgaben an 45°-Achsen richtig zu lösen (und den „Abstand zur Achse“ heranzuziehen), würde ein Verständnis der Orthogonalität miteinschließen; diese wird jedoch an Grundschulen in Deutschland nicht explizit gelehrt (vgl. u. a. KMK 2005; Niedersächsisches Kultusministerium 2017). Entsprechend selten wurde dies beobachtet: Lediglich bei richtigen Lösungen und bei dem Lösungsprodukt „Spiegelung an einer gedachten Achse und Verschiebung der Figur ODER Drehung der Figur um ein Drehzentrum“ konnte das Heranziehen des „Abstands zur Achse“ identifiziert werden. Auch bei Lösungsprodukten bei der Spiegelung anliegender Figuren an 45°-Achsen (Götz & Gasteiger 2018a, 2018b; Götz 2020) zeigt sich, dass die Orthogonalität augenscheinlich nicht beachtet worden ist, wie beispielsweise bei den Lösungsprodukten „Verlängern von Seitenlinien der Figur“ (vgl. Abschnitt 5.1.2.2; Abbildung 13, S. 85). Aufgaben an vertikalen und horizontalen Achsen hingegen werden vergleichsweise gut gelöst, vermutlich auch, da das Kriterium der Orthogonalität keine Rolle spielt. Aus den vorliegenden Interviews der Studie von Götz und Gasteiger (2022) wird ersichtlich, dass aus dem Beachten des Merkmals *Abstand an vertikalen und horizontalen Achsen* keine Aussagen getroffen werden können, inwieweit die Rechtwinkligkeit betrachtet wurde – die Lösungsprodukte entsprechen denen der Beachtung der *Entfernung an vertikalen Achsen* (Götz & Gasteiger 2022).

Bei der Analyse der Aufgabenmerkmale in Zusammenhang mit den Herangehensweisen fiel zudem auf, dass Schülerinnen und Schüler mehr Gesten und Handlungen bei der Bearbeitung von Aufgaben mit 45°-Achsen (vgl. Abschnitt 5.2.1.2) nutzten. Götz und Gasteiger (2022) sehen eine mögliche Begründung darin, dass die Lösung von Aufgaben an 45°-Achsen einen

höheren Grad an Raumvorstellung erfordert und der Aufbau sowie Umgang mit mentalen Bildern aus diesem Grund komplizierter ist als für Aufgaben mit vertikalen und horizontalen Achsen. Konkretes Handeln kann die Entwicklung mentaler Bilder unterstützen (Battista 2007; auch Piaget 1971). Die Beobachtungen von Götz und Gasteiger (2022) lassen sich auch durch die *Gesture-for-Conceptualization-Hypothesis* (Kita, Alibali & Chu 2017) bekräftigen. Nach Kita et al. (2017) unterstützen Gesten u. a. die Verarbeitung räumlich-motorischer Informationen. Die zentralen Thesen der *Gesture-for-Conceptualization-Hypothesis* sind zum einen, dass je schwieriger eine zu lösende Aufgabe ist, desto mehr Gesten werden produziert (siehe für einen Überblick Kita et al. 2017). Zum anderen verbessert die Produktion von Gesten die „manipulation performance“ (wie z. B. bei Aufgaben zur mentalen Rotation) (vgl. Kita et al. 2017). Gesten tragen also zur Konzeptualisierung von Informationen bei und unterstützen auf diese Weise das Denken und Sprechen.

Als weiteres schwierigkeitsgenerierendes Merkmal wurde der **Abstand der Figur** zur Achse herausgearbeitet. Aufgaben mit anliegenden Figuren werden von Schülerinnen und Schülern der Jahrgangsstufe 3 besser gelöst als Aufgaben mit nicht anliegenden Figuren (Götz & Gasteiger 2019; vgl. Abschnitt 6.1.1.2). Eine mögliche Erklärung hierfür lässt sich in der Entwicklung des Symmetriebegriffes finden (Kirsche 1992; siehe auch Vollrath 1984). Das Spiegeln anliegender Figuren ist nahe an dem auf der ersten Stufe stark intuitiv und handlungsgebundenen Interpretieren von Symmetrie („Zusammenklappen“) und aus diesem Grund vermutlich leichter für Grundschul Kinder. Erst auf Stufe 3 prägt sich ein analytisches Verständnis bezüglich des Abstandes eines Punktes und seines Bildpunktes zur Achse aus (Kirsche 1992; vgl. auch Level 2 nach Küchemann (1981), S. 49), wodurch vermutlich auch das Bearbeiten von nicht anliegenden Figuren erleichtert wird.

Götz und Gasteiger (2019) arbeiteten **Merkmale der Komplexität ebener geschlossener Figuren** heraus und identifizierten unterschiedliche Ausprägungen dieser Merkmale, die die Schwierigkeit von Aufgaben zur Achsenspiegelung beeinflussen (vgl. Abschnitt 3.3). Die *Lage der Seiten der Figur auf dem Untergrund* wurde als schwierigkeitsgenerierendes Merkmal herausgestellt (Götz & Gasteiger 2019). Aufgaben mit der Ausprägung „Figur hat schräge Linien“ (d. h. Seiten der Figuren schneiden Kästchengitter „irgendwie“ und nicht in den Kästchen-diagonalen) fallen Schülerinnen und Schülern der Jahrgangsstufe 3 am schwersten (vgl. Abschnitt 5.1.1.3).

Auch an dieser Stelle kann allgemeines pädagogisch-psychologisches Wissen helfen, diese Aufgabenschwierigkeiten zu erklären. Diese könnten auf den höheren Anspruch an das zeichnerische Können und auf feinmotorische Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler zurückgeführt werden (vgl. Abschnitt 2.4.1). Zeichnen entlang einer Linie oder entlang von Punkten bietet mehr Anhaltspunkte für korrekte Zeichnungen; man könnte auch hier vermuten, dass der Anspruch an die Fähigkeit der Raumvorstellung – vor allem an die Teilkomponente der räumlichen Beziehungen (u. a. Thurstone 1950; Lohman 1979; Radatz & Rickmeyer 1991) – beim Zeichnen schräger Linien höher ist: In diesem Fall muss die zu ziehende Linie in Beziehung gesetzt werden zum Kästchengitter (Götz & Gasteiger 2019). Darüber hinaus lässt sich als Grund für diese Schwierigkeitsausprägung nennen, dass gewisse Strategien (wie das Zählen der Länge einer Seitenlinie durch das Zählen der entsprechenden Kästchen entlang der Linie) bei schrägen Linien nicht funktionieren (Götz & Gasteiger 2022). In den Bearbeitungsprozessen der Schülerinnen und Schüler bei der Aufgabe mit einer Figur mit schrägen Linien wurde die Kongruenz der Seiten deutlich seltener herangezogen als bei Aufgaben mit Figuren ohne schräge Linien. Dementgegen wurden häufiger holistische Herangehensweisen in den Bearbeitungsprozessen der Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 4 identifiziert (Götz & Gasteiger 2022). Im Umkehrschluss bedeutet diese Erkenntnis auch, dass die Ausprägung „schräge Linien“ des Merkmals „*Lage der Seiten auf dem Untergrund*“ (Götz & Gasteiger 2019) Schülerinnen und Schülern möglicherweise deshalb schwerfällt, weil eben diese Zählstrategien nicht angewendet werden können und holistische Herangehensweisen nicht zwangsläufig zu korrekten Ergebnissen bei der Bearbeitung derartiger Aufgaben führen.

Götz und Gasteiger (2019) arbeiteten als weiteres Merkmal bezüglich der Komplexität der Figur die *Lage der Seiten der Figur zur Achse* heraus. Aufgaben mit Figuren, die zur Achse parallele oder orthogonale Seiten haben, fallen Schülerinnen und Schülern der Jahrgangsstufe 3 am leichtesten. Aufgaben mit keiner zur Achse parallelen Seite sind besonders schwierig für Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 3 (vgl. Abschnitt 5.1.1.4). Zu ähnlichen Ergebnissen mit einfachen Figuren (wie Strecken oder Fahnen) kamen auch Küchemann (1981) und Grenier (1985a). Die Schwierigkeit dieses Merkmals lässt sich mit dem durch Küchemann (1981) beschriebenen „Beibehalten von Winkeln“ erklären (vgl. Abschnitt 2.3.2.2). Aufgaben, bei denen nur eine Neigung kontrolliert werden muss (wie beispielsweise bei Aufgaben mit Figuren, die zur Achse parallele oder orthogonale Seiten haben), können also selbst mit fehlerhafter Vorstellung z.T. richtig gelöst werden, da hier nur die Neigung der Figur oder der Achse kontrolliert werden müssen: Statt zu spiegeln kann eine Verschiebung der parallelen

Seite bzw. eine Verlängerung der orthogonalen Seite durchgeführt werden (und weitere Seiten dann ergänzt werden). Zusätzlich scheint die Winkelkoordination insbesondere dann problematisch zu sein, wenn die Aufgabe eine 45°-Achse und keine zur Achse parallele Seite hat. Ein möglicher Grund hierfür könnte sein, dass dann zwei Abweichungen von der Vertikalen beachtet werden müssen – auch hier wäre zu vermuten, dass ein punktweises Vorgehen hilfreich sein könnte, um diese Fehler zu vermeiden (Götz & Gasteiger 2019; vgl. auch Küchemann 1981).

Die **Art des Untergrundes**, auf dem die Spiegelung durchzuführen ist, hat ebenso einen Einfluss auf die Schwierigkeit von Aufgaben zur Achsenspiegelung. Dabei werden Achsenspiegelungen auf Punkteraster von Schülerinnen und Schülern der Jahrgangsstufe 3 besser bearbeitet als Achsenspiegelungen auf Kästchengitter (Götz & Gasteiger 2019; vgl. Abschnitt 6.1.1.5). Bereits markierte Punkte – wie es sie im Punkteraster gibt – können als Orientierung bei der Achsenspiegelung dienen, gerade wenn noch kein umfassend analytisches Verständnis ausgeprägt ist. Die Eckpunkte der Figuren liegen im Punkteraster immer auf einem Punkt des Punkterasters und sind dadurch leicht zu finden. Dieses Punkteraster ähnelt oftmals einer ikonischen Darstellung des Geobretts – ein Punkt entspricht einem Nagel. Im Kästchengitter hingegen besteht diesbezüglich eine erhöhte Anforderung an die Figur-Grund-Wahrnehmung (vgl. Unterkapitel 2.4), da zusätzlich die Wahrnehmungsleistung Kreuzungspunkte im Kästchengitter zu suchen, welche dann den Eckpunkten der Bildfigur entsprechen, erforderlich ist (Götz & Gasteiger 2019). Wie Götz und Gasteiger (2022) zeigten, nutzen nur sehr wenige Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung der Aufgaben zur Achsenspiegelung auf Kästchengitter die Herangehensweise „*Punkte haben Spiegelpunkte*“ heran. Dies deutet darauf hin, dass ein analytisches Verständnis noch wenig ausgeprägt ist, und sich die Schülerinnen und Schüler der Grundschule deshalb anders behelfen müssen (bspw. durch das Drehen des Blattes o.ä.).

## 6.2.2 Schlussfolgerungen auf das zugrundeliegende Verständnis von Achsenspiegelungen

Aus der Betrachtung der Lösungsprodukte der Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 4 im Zusammenhang mit den Herangehensweisen, die die Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung nutzen, lassen sich gewisse Abstufungen im Symmetrieverständnis ableiten (vgl. Götz & Gasteiger 2022). Über die von Küchemann (1981) aufgabenbasiert herausgearbeiteten Stufen hinaus (vgl. Abschnitt 2.3.2.2), erweitert die hier vorgenommene integrative Betrachtung schwierigkeitsgenerierender Merkmale mit auftretenden Fehlern und mit genutzten

Herangehensweisen bei der Aufgabenbearbeitung das Wissen um das Denken der Schülerinnen und Schüler.

Schülerinnen und Schüler, die zum Lösungsprodukt **Figur verschoben** kommen, betrachteten überwiegend die *Kongruenz der Seiten* und zeigten *ganzheitliche Herangehensweisen* (Götz & Gasteiger 2022). Die Autorinnen folgern daraus, dass bei diesen Kindern ein Symmetrieverständnis auf einem geringeren Level gegeben ist, da noch nicht einmal ein handlungsgebundenes Verständnis einer Achsenspiegelung vorliegt (vgl. auch Level 1 nach Küchemann 1981; siehe Abschnitt 2.3.2.2). Betrachtet man die Häufigkeit des Auftretens des Fehlers **Figur verschoben** in der Grundschule (Götz & Gasteiger 2018a, 2018b) und in der Sekundarstufe (Götz 2020), so lässt sich zudem feststellen, dass dieser Fehler in der Sekundarstufe sowohl bei anliegenden als auch insbesondere bei nicht anliegenden Figuren seltener aufgetreten ist (vgl. Abschnitte 5.1.2.1 und 5.1.2.2). Vergleicht man diese Erkenntnisse mit den von Küchemann (1981) beschriebenen *Levels of understanding of reflection*, so ist festzustellen, dass Küchemann diesen Fehlertypus nicht explizit in seinen Levels anspricht. Nach Küchemann (1981) liegt bei allen von ihm untersuchten Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe ein mindestens adäquates Verständnis von Achsenspiegelung vor (vgl. Abschnitt 2.3.2.2, Tabelle 2, S. 49, Stufe 1). Da bei einer verschobenen Figur wesentliche Eigenschaften der Achsenspiegelung (bspw. die Richtungsumkehrung oder die Orthogonalität) jedoch nicht adäquat beachtet wurden, sind vor allem noch Grundschulkindern auf einem Level unterhalb der von Küchemann beschriebenen Levels zu sehen.

Die qualitativen Analysen von Götz und Gasteiger (2022) zeigten weiterhin, dass für das Lösungsprodukt **Spiegelung an einer vertikalen bzw. horizontalen Achse** ebenso die *Kongruenz der Seiten*, aber auch die Herangehensweisen *mentales Spiegeln*, *Geste des Spiegeln*, *andersherum* und die *Entfernung zur Spiegelachse* herangezogen wurden. Dies lässt darauf schließen, dass bei den Schülerinnen und Schülern eine starke Idee des realen Spiegeln vorliegt und sie gedanklich einen vertikal ausgerichteten Spiegel vor sich stellen. Mögliche Gründe dafür können in der Entwicklung des räumlichen Denkens gesehen werden: Die Entwicklung des räumlichen Denkens und der Aufbau mentaler Konzepte finden über die Verinnerlichung von Handlungen statt (u. a. Piaget & Inhelder 1971). Sind diese Handlungen verinnerlicht, erfordert das Lösen raumgeometrischer Aufgaben (wie bspw. Aufgaben zur Achsenspiegelung) unterschiedliche Prozesse des räumlichen Denkens: „[it] consists of a set of cognitive processes by which mental representations for spatial objects, relationships, and transformations are constructed and manipulated.“ (Clements & Battista 1992, S. 420). In den

Lösungsprodukten der **Spiegelung an einer vertikalen bzw. horizontalen Achse** sind bereits Handlungen verinnerlicht worden – jedoch unreflektiert in Bezug auf die eigentliche Spiegelachse geblieben. Es scheint also als wäre der Schritt der Verinnerlichung vollzogen im Hinblick auf das falsche Bezugssystem. Dies geht einher mit den Ergebnissen der qualitativen Studie von Ramful et al. (2015). Die Autoren folgern aus detaillierten Analysen zweier Bearbeitungen von Aufgaben zur Achsenspiegelung, dass Fehler auftreten, wenn die Schülerinnen und Schüler auf die visuelle Strategie als intuitive Ausweichlösung zurückgreifen (vgl. Ramful et al. 2015, S. 466). Die visuelle Strategie scheint der Idee des realen Spiegelns ähnlich. Auch wenn das Lösungsprodukt **Spiegelung an einer vertikalen bzw. horizontalen Achse** nicht der richtigen Lösung entspricht, so liegt doch zumindest das Verständnis (bewusst oder unbewusst) vor, dass die Achsenspiegelung richtungsumkehrend ist (eine mathematische Eigenschaft von Achsenspiegelungen) (vgl. Abschnitt 2.2.2.1).

Auf einer weiterhin höheren Stufe des Symmetrieverständnisses kann das Lösungsprodukt **Spiegelung an einer gedachten Achse und Verschiebung der Figur ODER Drehung der Figur um ein Drehzentrum** gesehen werden. Schülerinnen und Schüler, die bei Aufgaben an  $45^\circ$ -Achsen zu diesem Lösungsprodukt kommen, ziehen die *Kongruenz der Seiten, andersherum, mentales Spiegeln* und *die Geste des Spiegeln* (Aufgabe 3) und *mentales Falten* sowie *Gesten des Faltens* (Aufgabe 4) im Bearbeitungsprozess heran. Einige wenige Schülerinnen und Schüler bezogen sich in ihrem Lösungsprozess auch auf den *Abstand zu  $45^\circ$ -Achsen* – auch wenn diese Herangehensweise meist nur bei der Spiegelung des ersten Punktes herangezogen wurde. Dieser erste Punkt wurde von den Schülerinnen und Schülern ermittelt und davon ausgehend die Figur (ohne die Ermittlung weiterer Punkte) fertiggezeichnet. Vor dem Hintergrund analytischer, semi-analytischer und holistischer Strategien beim Lösen von Aufgaben mit räumlichem Gehalt, kann diese Vorgehensweise als semi-analytisch eingeordnet werden (vgl. Tahri 1993; Lima 2006). Die Bestimmung des ersten Punktes stellt bei den oben beschriebenen Vorgehensweisen den analytischen Teil dar, anschließend wird die Bildfigur lediglich durch „Fertigzeichnen“ ergänzt, was einem eher holistischen Vorgehen (oder „visual-mental reproduction“ nach Ramful et al. (2015)) entspricht. Dieses semi-analytische Vorgehen führt nur bei Aufgaben mit  $45^\circ$ -Achsen zu einem falschen – bei Aufgaben an vertikalen und horizontalen Achsen jedoch zu einem richtigen Ergebnis.

**Korrekte Lösungen** unterscheiden sich von anderen Lösungsprodukten überwiegend dadurch, dass der *Abstand zur vertikalen, horizontalen und  $45^\circ$ -Achse* bei der Aufgabenbear-

beitung herangezogen wurden. Die Bearbeitungen der Schülerinnen und Schüler zeigen unterschiedliche Vorgehensweisen, die zur korrekten Lösung der Aufgaben (an  $45^\circ$ -Achsen) führen. Während manche Schülerinnen und Schüler *Bildpunkte zu den Punkten der Figur* bestimmten, *drehten andere das Blatt* oder verwendeten das *Lineal als MIRA-Spiegel* zum Lösen der Aufgabe (Götz & Gasteiger 2022). Die Autorinnen folgern aus diesen Analysen, dass es scheint, als hätten die Schülerinnen und Schüler, die die Aufgaben richtig lösen, bereits eine Vorstellung davon, wo die Form positioniert werden muss, und sie halfen sich mit Strategien, um die Bildfigur dorthin zu zeichnen (Götz & Gasteiger 2022). Sie scheinen mit „Hilfsstrategien“, wie beispielsweise dem Drehen des Blattes oder den Einsatz des Geodreiecks als MIRA-Spiegel, ihren Mangel an Wissen über Orthogonalität zu kompensieren. Dies steht im Einklang mit den Schlussfolgerungen von Ramful et al. (2015), dass visuelle und analytische Strategien interagieren und, dass die visuelle Strategie entscheidender Ausgangspunkt ist, um den Lösungsprozess zu beginnen, auf dem die analytische Strategie aufbauen kann (Ramful et al. 2015). Dass Schülerinnen und Schüler auf einem höheren geometrischen Leistungsniveau besser als Kinder auf einem geringeren Leistungsniveau in der Lage sind, alternative Lösungsstrategien zu finden, die einen geringeren Anspruch an räumlich-visuelle Fähigkeiten stellen, zeigten auch andere Autoren (z. B. Grüßing 2002; Maier 1999). Für das korrekte Lösen von Aufgaben zur Achsenspiegelung (insbesondere an  $45^\circ$ -Achsen) – ohne ein in vollem Umfang ausgeprägtes analytisches Verständnis zu haben – bedeutet dies wiederum, dass auf Seiten der Schülerinnen und Schüler entweder hohe räumliche Fähigkeiten erforderlich sind oder, dass die Lösungsstrategien der Schülerinnen und Schüler flexibel sein müssen, um die richtige Lösung an  $45^\circ$ -Achsen zu finden (wie bspw. oben genannte Hilfsstrategien).

Generell kann aus diesen Analysen geschlossen werden, dass Schülerinnen und Schüler, die alle Eigenschaften der Achsenspiegelung verstehen, sich weniger auf ganzheitliche Verfahren sowie Gesten und Handlungen stützen müssen. Diese Ergebnisse stimmen mit Forschungsergebnissen zu räumlichen Fähigkeiten überein, die Informationen liefern, dass bei komplexeren Aufgaben Lösungsprozesse effizienter sind, wenn man sich auf analytische Verfahren bezieht (Grüßing 2002; Linn & Petersen 1985).

### 6.3 Interpretation der Ergebnisse zum Inhaltsbereich Achsensymmetrie

Ein weiteres Anliegen dieser Arbeit war es, Wissen zu generieren, welches Lehrerinnen und Lehrern eine Hilfe sein kann, ein anschlussfähiges Verständnis von Achsensymmetrie im Ge-

ometrieunterricht der Grundschule anzubahnen. Dazu wurden der Einfluss von Aufgabenmerkmalen auf das Erkennen von Achsensymmetrie bzw. auf das Einzeichnen von Symmetrieachsen in ebene Figuren sowie auftretende typische Fehler untersucht (Forschungsdesiderat 5; Götz et al. 2020). Eine Systematisierung der auftretenden Fehler zeigte, dass einige Fehler häufiger und in Figuren mit bestimmten Charakteristika auftreten (vgl. Abbildung 20, S. 92; siehe Abschnitt 5.1.4.3). Eine mögliche Ursache für diese Fehler wird erkennbar, wenn die Merkmale der Aufgaben, bei welchen die jeweiligen Fehler auftreten, genauer betrachtet werden. Aus diesem Grund werden die Ergebnisse zur Achsensymmetrie im folgenden Abschnitt vor dem Hintergrund bisheriger Forschung entlang der Merkmale von Figuren diskutiert. Anschließend werden erste Rückschlüsse auf das Verständnis von Achsensymmetrie gezogen. Dies erfolgt mit Bezug auf die bereits berichteten qualitativen Erkenntnisse zu Herangehensweisen, die Schülerinnen und Schüler beim Bearbeiten der Aufgaben zur Achsen Spiegelung nutzen und wird ergänzt durch erste Einblicke in qualitative Analysen der Bearbeitung von Aufgaben zur Achsensymmetrie. Ziel ist es, auf diese Weise ein möglichst umfassendes Wissen über das Verständnis von Schülerinnen und Schülern zur Achsensymmetrie zu erlangen.

### 6.3.1 Synthese der Ergebnisse zur Achsensymmetrie – diskutiert entlang der Merkmale von Figuren

Bezüglich des Aufgabenmerkmals **Ausrichtung der Achse** zeigte sich auch bei der Bearbeitung von Aufgaben zur Achsensymmetrie, dass schräge Achsen deutlich seltener richtig eingezeichnet werden als horizontale und vertikale Achsen. Vertikale Achsen werden am häufigsten richtig eingezeichnet (Götz et al. 2020). Wie auch in den Ergebnissen zum Aufgabenmerkmal 45°-Ausrichtung der Achse bei der Achsen Spiegelung (vgl. Götz & Gasteiger 2019) lässt sich bestätigen – und auf die gleiche Art begründen –, dass der Umgang mit vertikalen Achsen am leichtesten fällt, während hingegen schräge Achsen den Schwierigkeitsgrad der Aufgaben erhöhen (vgl. auch Bornstein et al. 1981; Fisher et al 1981; Boswell 1976). Ein Fehler, der sich bei allen Aufgaben zur Achsensymmetrie herauskristallisiert hatte, war das *Fehlende Einzeichnen von Achsen*. Dieser kann zumindest in Teilen dadurch erklärt werden, dass – werden nicht alle Achsen in einer Figur mit drei bzw. vier Symmetrieachsen eingezeichnet – so ist es meist die schräge Symmetrieachse, die nicht eingezeichnet wurde (bspw. im Quadrat oder Vierstern).

Der Vergleich des Aufgabenmerkmals **Anzahl einzuzeichnender Achsen** zeigte, dass die Lösungsquoten mit der Anzahl der einzuzeichnenden Achsen sinken (vgl. auch Schmidt 1986; Xistouri 2007). Ob dies auf die Komplexität der Figur zurückzuführen ist, oder auf die Tatsache, dass beim Einzeichnen mehrerer Achsen auch mehr Achsen vergessen werden können, kann auch in der Studie von Götz et al. (2020) nicht beantwortet werden. Einen ersten unterstützenden Hinweis gibt jedoch die statistische Auswertung mittels Kreuztabellen: Es zeigt sich ein Zusammenhang des fehlenden Einzeichnens von Symmetrieachsen in das Quadrat mit dem fehlenden Einzeichnen von Symmetrieachsen in den Vierstern (beide jeweils vier Symmetrieachsen). Interessant ist an dieser Stelle zusätzlich, dass in das Quadrat relativ oft alle vier Spiegelachsen richtig eingezeichnet werden, in den Vierstern jedoch seltener. Dies wirft die Frage auf, ob diese gute Lösungsquote im Zusammenhang damit steht, dass das Quadrat eine den Schülerinnen und Schülern wohlbekannte Figur aus dem Unterricht der Grundschule ist – wie eine Schulbuchanalyse zeigte (vgl. Götz et al. 2020). Somit könnte das Einzeichnen der Symmetrieachsen reproduziertem Wissen entsprechen, welches einen anderen Anforderungsbereich abdeckt als das Finden von Achsensymmetrie in weniger bekannten Figuren. Zieht man allgemein pädagogisch-psychologisches Wissen zur Interpretation dieses Aufgabenmerkmals heran, so ist es naheliegend zu vermuten, dass die Anzahl der eingezeichneten Achsen mit der Entwicklung metakognitiver Fähigkeiten (vgl. Modell zur Informationsverarbeitung, Abschnitt 2.4.1) zusammenhängt. Man könnte vermuten, dass Kinder der Jahrgangsstufe 3 und 4 entsprechend ihrer noch niedrigen Fähigkeiten zur Metakognition den Lösungsprozess als beendet befinden, sobald eine oder zwei Symmetrieachsen einer Figur gefunden werden – ohne die Aufgabenbearbeitung durch metakognitiv angesteuerte Denkprozesse zu reflektieren und die Figur erneute auf weitere Symmetrieachsen zu prüfen.

Die Analyse des Aufgabenmerkmals der **Arten der Symmetrieabbildung** zeigte, dass nicht achsensymmetrische Figuren häufig als solche erkannt wurden – ausgenommen der punktsymmetrischen Figuren und da insbesondere dem Parallelogramm (vgl. auch Tabelle 3, S. 90). Figuren, die u. a. achsensymmetrisch waren, hatten geringere Lösungshäufigkeiten als nicht achsensymmetrische Figuren. Figuren mit mehreren Symmetrien hatten die geringsten Lösungshäufigkeiten (vgl. Abschnitt 5.1.3.3).

Die Ergebnisse der qualitativen Fehleranalysen und die damit verbundene Fehlerkategorisierung zeigten, dass unabhängig von Figuren Schülerinnen und Schüler vermeintliche Achsen so einzeichnen, dass häufig zwei kongruente Teilfiguren entstehen, welche allerdings nicht durch eine Achsen Spiegelung zur Deckung gebracht werden können. Beispiele hierfür sind –

je nach Figur – das Einzeichnen von Diagonalen, Seitenhalbierenden oder vermeintlichen Achsen senkrecht zum Verschiebevektor. Das Entstehen zweier kongruenter Teilfiguren könnte auch erklären, warum der Fehler des Einzeichnens der Diagonalen beim Rechteck und Parallelogramm (hier entstehen zwei kongruente Teilfiguren) deutlich häufiger auftritt als beispielsweise beim Drachen (hier entstehen zwei nicht kongruente Teilfiguren) (vgl. Abbildung 18, S. 88). Dieses Ergebnis steht in Einklang mit der Vermutung, dass *punktsymmetrische* oder *punkt- und achsensymmetrische Figuren* seltener richtig als achsensymmetrisch bzw. nicht-achsensymmetrisch erkannt werden, als Figuren mit anderen Symmetrien (Genkins 1978; Schmidt 1986).

Auch der Fehler, dass die *Achsensymmetrie nicht erkannt* wird (v.a. bei achsensymmetrischen Schubfiguren, siehe Abbildung 19, S. 88, rechts) könnte zum Teil auf die Art der Symmetrieabbildung der Figur zurückgeführt werden: Bei achsensymmetrischen Schubfiguren liegt die falsch eingezeichnete vermeintliche Achse senkrecht zum Verschiebevektor und teilt die jeweilige Figur bereits deutlich in zwei kongruente Hälften. Diese augenfällige Abbildung zweier Teilfiguren könnte der Grund dafür sein, dass die eigentliche Symmetrieachse nicht erkannt wurde. Für diese Interpretation würde auch der statistische Zusammenhang des Identifizierens der achsensymmetrischen Schubfigur „Doppeltes Boot“ als nicht achsensymmetrisch mit dem Identifizieren der achsensymmetrischen Schubfigur „Doppelter Bogen“ als nicht achsensymmetrisch sprechen (vgl. Abschnitt 5.1.4.3, S. 92).

Über die bereits in Bezug zu den Aufgabenmerkmalen gesetzten Fehler hinaus, können in der Studie von Götz et al. (2020) weitere Zusammenhänge zwischen Fehlern vermutet werden. Beispielsweise zeigte sich ein Zusammenhang zwischen dem Einzeichnen der Diagonalen (als vermeintliche Symmetrieachsen im Rechteck) mit dem Einzeichnen der Diagonalen (als Symmetrieachsen im Quadrat). Figureneigenschaften des Rechtecks und des Quadrats ähneln sich durch die Parallelität gegenüberliegender Seiten und der vier rechten Winkel: Das Quadrat als spezielles Rechteck hat zusätzlich vier gleich lange Seiten, wodurch es sich in seinen Symmetrieeigenschaften vom allgemeinen Rechteck unterscheidet. Eine mögliche Erklärung für die Fehler im Rechteck könnte somit die Übergeneralisierung von erlerntem Wissen über die Symmetrieachsen des Quadrates sein, die falsch auf das Rechteck übertragen werden.

### 6.3.2 Schlussfolgerungen auf das Verständnis von Achsensymmetrie

Die in Abschnitt 6.3.1 diskutierten Ergebnisse werden im Folgenden in Bezug zu den Erkenntnissen der qualitativen Studien zur Achsenspiegelung gesetzt und auf der Basis erster Einzelerkenntnisse aus Interviews mit Schülerinnen und Schülern zu Aufgaben zur Achsensymmetrie diskutiert. Dieses In-Bezug-Setzen lässt Rückschlüsse auf unterschiedliche Niveaustufen des Verständnisses von Achsensymmetrie zu – ähnlich wie es bereits zur Achsenspiegelung analysiert wurde.

Auf ein geringeres Verständnis von Achsensymmetrie deutet die systematische Fehleranalyse dahingehend hin, wenn insbesondere in achsensymmetrischen Schubfiguren und rein achsensymmetrischen Figuren die *Achsensymmetrie nicht erkannt* wurde. Es scheint als könnten diese Schülerinnen und Schüler keine kongruenten Teilfiguren finden, die sich durch eine Achsenspiegelung aufeinander abbilden lassen. Dies könnte zum einen darauf hindeuten, dass das Symmetrieverständnis noch nicht dahingehend ausgeprägt ist, dass das Wissen vorhanden ist, dass eine Figur bezüglich der Symmetrieachse in zwei deckungsgleiche Hälften zerfällt. Ein anderer möglicher Grund wäre, dass es andere Figurenmerkmale gibt, die die visuelle Wahrnehmung dieser beiden Teilfiguren erschweren (siehe Beispiele achsensymmetrischer Schubfiguren, Abbildung 19, S. 88).

Ein weiterer Fehler, der auf ein eher geringes Verständnis von Achsensymmetrie schließen lässt, ist das Einzeichnen *vermeintlicher Symmetrieachsen*, welcher bei einigen Arten der Symmetrieabbildungen (inkl. Parallelverschiebung) auftrat. Der Fehler könnte bei den berichteten, häufig auftretenden *vermeintlichen Symmetrieachsen* (vgl. Abbildung 20, S. 92, in fett gedruckt) darauf zurückzuführen sein, dass die Teilfiguren, die beim Einzeichnen dieser vermeintlichen Symmetrieachsen entstehen, deckungsgleich sind. Schülerinnen und Schüler könnten also beim Einzeichnen der Symmetrieachsen überwiegend ganzheitlich gearbeitet haben und auf die „Figurform“ der Teilfiguren geachtet haben. Derartige Lösungen würden sich also nicht auf ein Symmetrieverständnis im normativen Sinne (vgl. Abschnitt 2.2.1) stützen, sondern der Definition der Wohlproportioniertheit nach Weyl (1980) folgen.

Das *Einzeichnen einer Geraden senkrecht zum Verschiebevektor* könnte darauf hindeuten, dass die Schülerinnen und Schüler bereits verstanden haben, dass eine achsensymmetrische Figur aus zwei kongruenten Teilfiguren besteht. Nicht verstanden haben diese Schülerinnen und Schüler jedoch, dass diese beiden Teilfiguren durch eine Spiegelung an der Symmetrieachse

aufeinander abgebildet werden müssen. Dieser Fehler ähnelt stark dem Fehler beim Lösungsprodukt *Figur verschoben* bei Aufgaben zur Achsenspiegelung. In beiden Fällen wurden allem Anschein nach überwiegend ganzheitliche Kriterien bei der Bearbeitung herangezogen und die beiden Figuren bzw. Teilfiguren können „nur“ durch eine Verschiebung aufeinander abgebildet werden.

Ein weiterer Aspekt, der charakteristisch für das Verständnis zur Achsensymmetrie ist, kann anhand der Aufgabe „Rechteck“ aufgezeigt werden. Exemplarische Erkenntnisse aus Interviews mit Kindern zeigen, dass Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe korrekt lösen, bereits ein Verständnis davon haben, dass achsensymmetrische Figuren unter Anwendung der Kongruenzabbildung Achsenspiegelung invariant bleiben, also ein Punkt auf einen entsprechenden Spiegelpunkt abgebildet wird. Dies soll exemplarisch an einem Beispiel veranschaulicht werden. Frieda (Jahrgangsstufe 4, 11 Jahre alt) prüft eine eingezeichnete Diagonale im Rechteck: Sie kommt zu dem Schluss, dass die Diagonale keine Spiegelachse ist, weil „wenn ich das da so rüber klappe (*zeigt auf eine Ecke des Rechtecks*), dann kommt die Ecke da an (*zeigt auf einen Punkt außerhalb des Rechtecks*), statt da (*zeigt auf die Ecke des Rechtecks*).“ Es zeigt sich, dass das Verständnis „Punkte haben Spiegelpunkte“ auch beim Überprüfen auf Achsensymmetrie eine wichtige Rolle spielen kann – ähnlich wie die Herangehensweise „*Punkte haben Spiegelpunkte*“ bei der Achsenspiegelung zum erfolgreichen Lösen von Aufgaben führen kann (Götz & Gasteiger 2022).

Gleichzeitig verdeutlicht dieses Beispiel, dass Aufgaben zum Einzeichnen und Überprüfen von Symmetrieachsen mit der Vorstellung eines Faltvorgangs (die Teilfiguren müssen dann aufeinander zum Liegen kommen) gelöst werden können. Naheliegender wäre also zu vermuten, dass das Überprüfen einer Figur auf Achsensymmetrie primär auch eine hohe Anforderung an das räumliche Vorstellungsvermögen stellt, und Schülerinnen und Schüler mit einer guten Raumvorstellung einen Vorteil beim Lösen dieser Aufgaben haben. Allerdings scheint es große interindividuelle Unterschiede zu geben, wie gut dieser Klappvorgang im Kopf durchgeführt werden kann. Es ist zu vermuten, dass Schülerinnen und Schüler, die Aufgaben zum Einzeichnen von Symmetrieachsen korrekt lösen, zum einen die Vorstellung „*andersherum*“ haben, wissen, dass die Figur unter Anwendung der Kongruenzabbildung Achsenspiegelung invariant bleibt (also jeder Punkt einen Spiegelpunkt bezüglich der eingezeichneten Achse hat) und sie können dies auch mit Hilfe mentaler Operationen überprüfen.

Die in diesem Abschnitt diskutierten Ergebnisse geben Anlass zu vermuten, dass Fehler insbesondere auf spezielle Eigenschaften von Figuren zurückzuführen sind: Das Einzeichnen

vermeintlicher Symmetrieachsen scheint nicht willkürlich zu geschehen, sondern sich an speziellen Figureneigenschaften zu orientieren (gleiche Winkelgrößen, parallelliegende Seiten, gleiche Länge zweier Seiten der Figur). Die Analysen dieses Abschnitts lassen vermuten, dass das Orientieren an Eigenschaften der Figuren beim Erkennen von Achsensymmetrie eher zu falschen Ergebnissen zu führen scheint - wohingegen eine gute Raumvorstellung erfolgversprechender erscheint.

#### 6.4 Zusammenfassendes Resümee und Forschungsperspektiven

Ein besonderer Mehrwert dieser Arbeit kann in den Erkenntnissen zu fachdidaktischem Wissen bezüglich des Unterrichtens der Achsenspiegelung und der Symmetrie in der Grundschule gesehen werden. Inhaltsspezifische schwierigkeitsgenerierende Merkmale von Aufgaben zur Achsenspiegelung in der Grundschule (vgl. Forschungsdesiderat 3) bieten eine neue, fachdidaktische Wissensbasis für Grundschullehrerinnen und -lehrer. Bisheriges Wissen zu Aufgabenschwierigkeiten, das überwiegend für die Sekundarstufe vorlag, konnte ergänzt werden. Insbesondere das herausgearbeitete Kategorienschema bezüglich schwierigkeitsgenerierender Merkmale bei der Achsenspiegelung und ihrer Ausprägungen kann sowohl für weitere Forschungsvorhaben genutzt werden und stellt gleichermaßen fachdidaktisches Aufgabenwissen für Lehrerinnen und Lehrer bereit. Als Teil professionellen Wissens kann dieses Wissen als wichtige Basis für das Unterrichten von Achsenspiegelung dienen – bei der Aufgabenerstellung, bei der Kompetenzdiagnostik und bei der Auswahl adäquater Unterrichtsmaterialien. Ebenso wurde eine fachdidaktische Wissensbasis zum Einfluss von Aufgabenmerkmalen auf das Erkennen von Achsensymmetrie bzw. das Einzeichnen von Symmetrieachsen in ebene Figuren in der Grundschule im Rahmen dieser Arbeit erstmalig herausgearbeitet. Annahmen zum Einfluss von Aufgabenmerkmalen (wie beispielsweise der Punktsymmetrie) auf die Aufgabenbearbeitung konnten bestätigt werden.

Weiterhin wurde in dieser Arbeit eine fachdidaktische Wissensbasis zu Fehlern bei der Achsenspiegelung und beim Erkennen von Achsensymmetrie bzw. beim Einzeichnen von Symmetrieachsen in ebene Figuren generiert, welches eine weitere wichtige Komponente fachdidaktischen Wissens von Lehrerinnen und Lehrern darstellt (u. a. Baumert & Kunter 2006; Loewenberg Ball et al. 2008). Wissen um typische Fehler bei der Achsenspiegelung lag aus bisheriger Forschung nur vereinzelt vor und war nicht ausreichend, um ausgehend von Fehlern bei der Achsenspiegelung und -symmetrie angemessene Lernprozesse abzuleiten (vgl. Forschungsdesiderat 4). Es zeigte sich in dieser Arbeit, dass die Fehler von Grundschülerinnen

und -schülern andere sind als die der Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe und, dass diese Fehler sich unterscheiden – je nachdem, ob anliegende oder nicht anliegende Figuren gespiegelt werden. Fachdidaktisches Wissen zu typischen Fehlern beim Erkennen von Achsensymmetrie bzw. beim Einzeichnen von Symmetrieachsen in ebene Figuren stellt erste Erkenntnisse in diesem Bereich dar. Hierzu bedarf es noch weiterer Studien, die die Befunde zu typischen Fehlern mit einer größeren Aufgabenbasis bestätigen und weitere Merkmale herausarbeiten.

Wissen um typische Fehler, die im Umgang mit Aufgaben zur Achsenspiegelung und Achsensymmetrie auftreten, kann bei der Analyse der Lernvoraussetzungen bei Grundschulkindern hilfreich sein und unverzichtbare Grundlagen für eine handlungsleitende Diagnostik im Unterricht schaffen (vgl. Abschnitt 2.4, Abbildung 2, S. 32). Aussagen zu systematischen Fehlern, also Fehlern die die *individuelle* Leistung einer Schülerin bzw. eines Schülers charakterisieren (Käser 2011) und Aufschluss über das individuelle Verständnis von Achsensymmetrie geben, können anhand dieser Arbeit nicht getroffen werden. Wissen um systematische Fehler könnte für Lehrkräfte zusätzlich hilfreich sein, um an den aktuellen Lernprozess einzelner Schülerinnen und Schüler anknüpfen zu können und somit einen soliden Wissensaufbau zu ermöglichen (Spychinger et al. 1999). In der Untersuchung systematischer Fehler von Schülerinnen und Schülern ist eine weitere Forschungsperspektive zu sehen. Wissen zu systematischen Fehlern in unterschiedlichen Jahrgangsstufen könnte dazu beitragen, wissenschaftlich fundierte Erkenntnisse zum curricularen Aufbau von Inhalten zu generieren (vgl. auch Forschungsdesiderat 1).

Herangehensweisen, die Schülerinnen und Schüler der Grundschule bei der Lösung von Aufgaben zur Achsenspiegelung nutzen, wurden in dieser Arbeit erhoben. Diese Herangehensweisen lassen Vermutungen zu Lernvoraussetzungen von Schülerinnen und Schülern bzw. zu dem, was Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung der Aufgaben zur Achsenspiegelung denken, zu. Wissen zu möglichen Vorgehensweisen von Schülerinnen und Schülern ist aus Sicht von Lehrerinnen und Lehrern besonders wertvoll, da dadurch auch Wissen über Lernvorgänge (als Grundlage diagnostischen Handelns) (vgl. Schrader 2013; vgl. auch Wollring 2006) vorhanden ist und auf diese Weise auftretende Fehler der Schülerinnen und Schüler gedeutet werden können – wie es in dieser Arbeit geschehen ist. Je nachdem, wie die Schülerinnen und Schüler an die Bearbeitung der Aufgaben zur Achsenspiegelung herangehen, zeigen sich unterschiedliche Ebenen an Symmetrieverständnis. Diese Erkenntnisse können als

diagnostisches Wissen angesehen werden und sind somit ein Teil einer Wissensbasis an professionellem Wissen, welches Grundschullehrerinnen und -lehrer brauchen, um gezielte, an das Individuum angepasste diagnostische Maßnahmen – informeller und formeller Art – zu ergreifen (vgl. Abschnitt 1.2.4). Welches Denken bzw. welche Vorstellung von *Symmetrie* Schülerinnen und Schüler haben, wenn sie die berichteten Fehler machen, konnte in dieser Arbeit nur aufgrund auftretender typischer Fehler vermutet werden. Auch mögliche Gründe, die hinter Schwierigkeiten bei Aufgaben zur Symmetrie stehen (wie beispielsweise der Einfluss von Eigenschaften der Figuren wie Winkel oder Seitenlängen), konnten nur angenommen werden. Hierauf Bezug nehmend ist es eine weitere Forschungsperspektive, dieses Wissen über das Denken der Schülerinnen und Schüler – ähnlich, wie es für die Achsenspiegelung bereits in einer qualitativen Interview-Studie geschehen ist – auch für die Achsensymmetrie zu präzisieren. Ausgehend von typischen Fehlern und Aufgabenschwierigkeiten könnte so ein Erkenntnisgewinn bezüglich zugrundeliegender, mathematisch nicht tragfähiger Vorstellungen entstehen. Auf diese Weise könnte auch geklärt werden, ob die Schülerinnen und Schüler die Vorstellung „es entstehen zwei kongruente Teile beim Einzeichnen einer Achse“ tatsächlich gleichsetzen mit – oder unterscheiden von – der Vorstellung „ist bezüglich der Spiegelung an einer Achse symmetrisch“ (Götz et al. 2020). Ungeklärt bleibt auch, ob sich die Kinder wirklich an spezifischen Eigenschaften der Figur orientieren (wie beispielsweise Ecken, parallel liegenden Seiten, etc.) oder ob eventuell ein im Kopf ungenau nachvollzogener Klappvorgang hinter den (fehlerhaften) Aufgabenlösungen steht. Wenn es gelänge, bei typischen Fehlerarten zu wissen, welche Vorstellung von Kindern diesen Fehler auslöst, könnte im Unterricht gezielt darauf eingegangen werden und dieses Wissen für diagnostische Aktivitäten verwendet werden.

Zusammenfassend unterstreicht die Diskussion der Ergebnisse der vorliegenden Arbeit die Bedeutung einer differenzierten, analytischen Sicht auf die Lösungsprodukte der Schülerinnen und Schüler und die Bedeutung adäquater Unterrichtsmethoden. Eine weitere Forschungsperspektive, die sich aus dieser Arbeit ergibt, liegt darin, Zusammenhänge zwischen den Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler Aufgaben zur Symmetrie und Achsenspiegelung zu lösen und ihrem räumlichen Vorstellungsvermögen zu untersuchen. Mögliche Zusammenhänge mit unterschiedlichen Komponenten des räumlichen Vorstellungsvermögens fanden bereits an unterschiedlichen Stellen Erwähnung. Erste Hinweise auf den Einfluss unterschiedlicher Teilkomponenten des räumlichen Vorstellungsvermögens auf das Bearbeiten

raumgeometrischer Aufgaben zeigen sich in Qualifikationsarbeiten (bspw. Gillert 2020). Basierend auf einer Fallstudie vermuten Hoyles und Healy (1997), dass insbesondere durch die Möglichkeit, während der Bearbeitung der Aufgaben zur Achsensymmetrie andere Perspektiven einzunehmen, eine Voraussetzung gegeben ist, Aufgaben korrekt zu lösen. Xistouri und Pitta-Pantazi (2006) zeigen einen Zusammenhang zwischen Fähigkeiten zur Perspektivübernahme und Fähigkeiten, Aufgaben zur Achsensymmetrie zu lösen. Wissen über Zusammenhänge dieser Art könnte unter anderem dazu beitragen, nicht nur mögliche Fehler zu erfassen (wie es in dieser Arbeit geschehen ist), sondern darüber hinaus fachdidaktisches und allgemein-pädagogisches Wissen zu Hintergründen der Fehler nutzen zu können, um gezielte Fördermaßnahmen zu ergreifen (Götz et al. 2020).

Die Bedeutung der in dieser Arbeit neu generierten Wissensbasis wird insbesondere deutlich, wenn fachliches und fachdidaktisches Wissen im Kontext der Modelle professionellen Handelns von Lehrerinnen und Lehrern als Teil der professionellen Handlungskompetenz reflektiert werden (u. a. Baumert & Kunter 2006; Loewenberg Ball et al. 2008). Wie qualitative Studien zeigen, scheint sich fachdidaktisches Wissen positiv auf die Unterrichtsqualität sowie die Qualität der Lerngelegenheiten und Lernfortschritte auszuwirken (u. a. Fennema et al. 1996; Carpenter & Fennema 1992). Wie auch Hill et al. (2004) anhand von Mehrebenenanalysen zeigen, kann das kombinierte fach- und fachdidaktische Wissen von Grundschullehrkräften Leistungsfortschritte von Schülerinnen und Schülern vorhersagen. Auch in der Sekundarstufe erwiesen sich das fachdidaktische Wissen von Lehrerinnen und Lehrern und das Fachwissen (vermittelt über das fachdidaktische Wissen) als wichtige Prädiktoren für ein anspruchsvolles und konstruktiv unterstützendes Unterrichten (Baumert & Kunter 2006, S.496). Mediiert über die Merkmale der Unterrichtsgestaltung sind Fachwissen und fachdidaktisches Wissen auch für die Fachleistungen von Schülerinnen und Schülern substantiell bedeutsam (vgl. Baumert et al. 2006, zitiert nach Baumert & Kunter 2006, S. 496). An dieser Stelle wird die praktische Bedeutung des fachlichen und fachdidaktischen Wissens für den Unterricht – wie sie bereits zu Beginn dieser Arbeit in Abbildung 2 (siehe S. 32) angedeutet wurde – ersichtlich. Um im Mathematikunterricht der Grundschule angemessen zu handeln – im Sinne einer mathematikunterrichtsbezogenen Handlungskompetenz – bedarf es neben fachdidaktischem und diagnostischem Wissen (wie es im Rahmen dieser Arbeit generiert wurde) zusätzlich der Kenntnis wesentlicher Merkmale von Lernumgebungen sowie das Nutzen dieser zur zielgerichteten Konzeption von Lerngelegenheiten (vgl. bspw. DMV et al. 2008, S.11). Kompetentes Handeln

von Lehrpersonen umfasst des Weiteren *Wissen um Aufgaben als Ausgangspunkt für Lernprozesse*, *Wissen zu Unterrichtsmethoden* und *Wissen zu fachspezifischen Interventionsmöglichkeiten* (DMV et al. 2008). Ausgehend von Erkenntnissen zu fachdidaktischem und diagnostischem Wissen, ist dahingehend eine weitere Forschungsperspektive zu sehen, adäquate Unterrichtsmethoden zu analysieren bzw. den Einsatz von geeignetem Material beim Unterrichten von Symmetrie und Achsenspiegelung in der Grundschule zu untersuchen.

## 7 Implikationen und Fazit

Die Ergebnisse dieser Arbeit sind auch für die Unterrichtspraxis relevant. So soll abschließend erläutert werden, wie die Wissensbasis, die geschaffen wurde, auch über die Forschungsperspektive hinaus von Bedeutung sein kann, um Lehrkräfte dabei zu unterstützen, ein grundlegendes Verständnis von Symmetrie und Achsenspiegelung bereits in der Grundschule anschlussfähig anzubahnen. Die hier vorgestellten Erkenntnisse bieten Lehrerinnen und Lehrern der Grundschule sowohl bei der Aufgabenerstellung, bei der Kompetenzdiagnostik und bei der Auswahl adäquater Unterrichtsmaterialien eine wertvolle Wissensbasis (vgl. Forschungsdesiderat 7).

### 7.1 Konsequenzen für die Praxis

Aus systematischen Erkenntnissen zu professionellem Wissen von Lehrerinnen und Lehrern, die in dieser Arbeit zu schwierigkeitsgenerierenden Merkmalen von Aufgaben, typischen Fehlern von Schülerinnen und Schülern und deren Denken gewonnen wurden, lassen sich Handlungsempfehlungen für den Unterricht ableiten. Insbesondere aus Problemen, die bei Aufgaben zur Achsenspiegelung und zum Einzeichnen von Symmetrieachsen auftreten, können Kriterien für einen adäquaten Material- und Aufgabeneinsatz abgeleitet werden, welcher die teils noch nicht tragfähigen Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern berücksichtigt. Auf die Frage, welches Material sich auf welche Art und Weise mit welchem Ziel einsetzen lässt (Forschungsdesiderat 7), können durch die hier vorliegenden Ergebnisse erste Antworten gegeben werden.

#### 7.1.1 Handlungsgerüst zur Erstellung adäquater Aufgaben

Von besonderer Bedeutung für die Unterrichtspraxis sind Erkenntnisse über Aufgaben zur Achsenspiegelung, die durch das Kategorienschema bezüglich schwierigkeitsgenerierender Merkmale und ihrer Ausprägungen visualisiert wurden (vgl. Abbildung 10, S. 78). Dieses Kategorienschema kann Lehrerinnen und Lehrern helfen, Aufgaben wohlüberlegt in ihrem Unterricht einzusetzen. Grundlegend für die Erstellung gut geeigneter Aufgaben ist in diesem Fall die Möglichkeit Schwierigkeitsstufen gezielter als bisher einschätzen und Lösungsprodukte der Schülerinnen und Schüler anhand des Schemas gezielter einordnen zu können. Dadurch kann die diagnostische Qualität verbessert werden. Wie dieses Kategorienschema ähnlich eines Schieberegler-Systems angewandt werden kann, um Aufgabenschwierigkeiten

zu variieren, zeigt Götz (2020). Die auf empirischer Basis generierten Ergebnisse lassen sich nicht nur für die informelle Diagnose, sondern auch für formelle Diagnosen nutzen, indem sie beispielsweise für die Erstellung von Testaufgaben herangezogen werden.

### 7.1.2 Handlungsgerüst zum adäquaten Materialeinsatz

Die Ergebnisse dieser Arbeit zeigen an vielen Stellen, dass Schülerinnen und Schüler der Grundschule stark handlungsgebundene Vorstellungen haben. Genauer betrachtet scheint es so, als ob sich Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufen 3 und 4 teilweise im Übergang vom handlungsgebundenem zum analytischen Vorgehen befinden. Hierzu ließe sich vermuten, dass die noch stark handlungsgebundenen Vorstellungen von Grundschulkindern durch den vorherrschenden Einsatz von Material, das überwiegend ein holistisches Verständnis von Achsenspiegelung bzw. -symmetrie in den Vordergrund stellt, begünstigt werden. Daher wäre eine Möglichkeit, mehr Materialien einzusetzen, die den Übergang von stark handlungsgebundenen Vorstellungen zu analytischem Vorgehen unterstützen: Ein Material, das auch erste analytische Komponenten miteinbezieht, ist beispielsweise das Prickeln. Im Unterricht sollten demnach handlungsgebundene Verfahren und analytische Vorgehensweisen integriert werden bzw. Aufgabenstellungen mit verschiedenen Zielsetzungen abwechselnd eingesetzt und reflektiert werden. Hoyles und Healy (1997) zeigten bereits, dass durch den Einsatz gewisser computerbasierter Lernumgebungen Kinder ihre „*Vorstellung von Achsenspiegelung*“ im Sinne eines *Conceptual change* (vgl. dazu auch Duit 1999; Posner et al. 1982) ändern, während sie in dieser Lernumgebung arbeiten.

Bei Aufgaben zur Achsensymmetrie scheint es hingegen eher so, dass u. a. eine mangelnde Raumvorstellung zu Fehlern beim Einzeichnen bzw. beim Überprüfen von Symmetrieachsen führen könnte. Hier wäre zu überlegen, ob eine Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens sinnvoll wäre. Zudem könnte das Verständnis vertieft werden, wenn in Prüfverfahren sowohl ganzheitliche als auch analytische Methoden integriert werden. Dies steht im Einklang mit den Erkenntnissen von Ramful et al. (2015), dass visuelle und analytische Strategien interagieren und, dass die visuelle Strategie entscheidender Ausgangspunkt sein kann, um den Lösungsprozess zu beginnen, auf dem dann die analytische Strategie aufbauen kann (Ramful et al. 2015). Eine weitere Möglichkeit, das Verständnis von Achsensymmetrie zu fördern, könnten Methoden sein, die einen dynamischen Zugang zur Achsensymmetrie verfolgen. Unterrichtspraktische Studien, die sich mit dem Einsatz von Computerprogrammen beim Erlernen der Achsensymmetrie befassen (Ng und Sinclair 2015; Xistouri und Pitta-Pantazi

2013; Thangamani und Eu 2019), zeigen, dass durch derartige Methoden der Aufbau eines fundierten Symmetrieverständnisses unterstützt werden könnten.

## 7.2 Fazit

Die Ergebnisse dieser Arbeit zeigen, dass die Auseinandersetzung mit Fehlern von Schülerinnen und Schülern als besonders hilfreich angesehen werden kann, um (Lern-) Schwierigkeiten aufzudecken und um aus erkannten Fehlermustern Hinweise für Fördermaßnahmen der Schülerinnen und Schüler zu gewinnen: Dazu ist eine qualitative Analyse der Fehler notwendig (Lorenz & Radatz 1993). Gleichmaßen soll an dieser Stelle dafür sensibilisiert werden, dass „Fehler nicht gleich Fehler“ sind. Die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten, detaillierten Analysen der Lösungsprodukte von Schülerinnen und Schülern bei Aufgaben zur Achsenspiegelung und Achsensymmetrie zeigen, dass Fehler nicht willkürlich entstehen, und es meist nachvollziehbare Ursachen für diese gibt.

Abschließend soll – im Sinne eines Ausblicks - an dieser Stelle die Lehrkraft erneut in den Mittelpunkt gerückt werden. Professionelles Wissen von Grundschullehrerinnen und -lehrern, das notwendig ist, um im Inhaltsbereich Achsenspiegelung und Achsensymmetrie anschlussfähig zu unterrichten, wurde in dieser Arbeit ausführlich geschildert. Neben den inhaltspezifisch ausgerichteten Facetten professionellen Wissens sind jedoch noch andere Merkmale der Lehrperson unterrichtsrelevant, die hier nicht weiter angesprochen wurden. Dazu zählt beispielsweise das Engagement, die Motivation oder die verwendete Sprache. Um exemplarisch aufzuzeigen, dass sich professionelles Wissen auch in einer präzisen Sprache der Lehrerinnen und Lehrer bezüglich spezifischer Begriffe zeigt, werden Äußerungen von zwei Schülern der gleichen Klasse, Fabian und Max, herangezogen. Beide Kinder verwenden den Begriff „**gleich**“, jedoch um verschiedene Sachverhalte zu erklären:

- Fabian prüft die eingezeichneten Symmetrieachsen im Rechteck. Dazu stellt er das Geodreieck auf die eingezeichnete Diagonale des Rechtecks: „Da muss ich mal nachgucken. [...] Ich würde sagen, es ist richtig, weil **es ist ja gleich**, wenn man hier so guckt (*fährt dabei die beiden Teilfiguren links und rechts der Diagonale nach*).“ – Gleich wird hier also verstanden als hat kongruente Teile, die sich jedoch nicht durch eine Achsenspiegelung aufeinander abbilden lassen.

- Max (Jahrgangsstufe 4, 10 Jahre alt) kommt gleich zu dem Ergebnis, dass die Diagonale des Rechtecks keine Spiegelachse ist, „weil wenn man das einknickt (*macht eine Bewegung mit der Hand ähnlich eines Klappvorgangs*), dann ist **das nicht gleich mit dem hier** (*zeigt auf die andere Seite seiner Hand*).“ – Gleich wird hier verstanden als, kommt durch eine Kongruenzabbildung (nämlich die der Achsenspiegelung) nicht aufeinander zu liegen.

Ein und derselbe Begriff wird von den Kindern verwendet, um unterschiedliche mathematische Erkenntnisse zu versprachlichen. Dies zeigt exemplarisch auf, wie wichtig es ist, als Lehrkraft selbst präzise auf die Sprache zu achten und Schülerinnen und Schüler dazu anzuweisen, dies zu tun. Diese Fähigkeit ist insbesondere auch beim Aufbau der prozessbezogenen Kompetenz „Argumentieren“ nötig und sollte im Unterricht auf verschiedene Weise angebahnt werden. Nicht zuletzt in der präzisen Verwendung von Begriffen zeigt sich eine fachliche Qualifizierung der Schülerinnen und Schüler, die von der Vorstellung der Symmetrie als etwas Wohlproportioniertem (nach Weyl 2017) (umgangssprachlich ausgedrückt „hat gleich aussehende Teile“), hin zu einem mehr und mehr mathematisch definierten Verständnis von Symmetrie und Achsenspiegelung führt („die Strecke, die Punkt und Spiegelpunkt verbindet, ist auf beiden Seiten der Achse gleich lang und liegt senkrecht zur Spiegelachse“).

## Literatur

- Ball, D. L. (2003). *Mathematical proficiency for all students: Toward a strategic research and development program in mathematics education*. Santa Monica, CA: Rand Education.
- Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching. *American Educator*, 29(3), 14–46.
- Barke, H.-D. (2006). *Chemiedidaktik. Diagnose und Korrektur von Schülervorstellungen*. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag.
- Barratt, E.S. (1953). An analysis of verbal reports of solving spatial problems as an aid in defining spatial factors. *The Journal of Psychology*, 36, 17–25.
- Blischke, K. (2010). Entwicklung von Zielbewegungen. In N. Schott, & J. Munzert (2010), *Motorische Entwicklung* (S. 103–126). Hildesheim: Hogrefe.
- Blömeke, S., Kaiser, G., & Lehmann, R. (2010) (Hrsg.). *TEDS-M 2008. Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Primarstufenlehrkräfte im internationalen Vergleich*. Münster: Waxmann.
- Baumert, J., & Kunter, M. (2006). Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft* 9, 469–520.
- Baumert, J., Blum, W., Brunner, M., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Kunter, M., Neubrand, M., & Tsai, Y. M. (2006). *Teacher knowledge and student progress, What do we mean by “Teachers’ Professional Competence?”* – Cubberly Lecture. – Stanford.
- Baumert, J., & Kunter, M. (2011). Das Kompetenzmodell von COACTIV. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (S. 29–54). Münster u. a.: Waxmann.
- Bayerisches Staatsministerium für Bildung und Kultus, Wissenschaft und Kunst (Hrsg.) (2014). *LehrplanPLUS Grundschule. Lehrplan für die bayerische Grundschule*. <https://www.lehrplanplus.bayern.de/>. Zugegriffen am 07.09.2020.
- Bell, A. (1993). Some experiments in diagnostic teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 115–137.
- Bender, P. (1978a). Zentrale Ideen der Geometrie für den Unterricht der Sekundarstufe I. *Beiträge zum Mathematikunterricht Jg. 1978*. Vorträge auf der 12. Bundestagung für Didaktik und Mathematik vom 28.2. bis 3.3.1978 in Münster. 8–17.
- Bender, P. (1978b). Umwelterschließung im Geometrieunterricht durch operative Begriffsbildung. *Mathematikunterricht*, 5/78, 25–87.
- Benölken, R., Gorski, H.-J., & Müller-Philipp, S. (2018). *Leitfaden Geometrie: für Studierende der Lehrämter* (7., überarbeitete und erweiterte Auflage). Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Berk, L. E. (2020). *Entwicklungspsychologie* (7., aktualisierte Auflage). Hallbergmoos: Pearson.
- Bornstein, M. H., Ferdinandsen, K., & Gross, C. G. (1981). Perception of Symmetry in Infancy. *Developmental Psychology*, 17(1), 82–86.
- Bornstein, M. H., & Krinsky, S. (1985). Perception of Symmetry in Infancy: The Salience of Vertical Symmetry and the Perception of Pattern Wholes. *Journal of Experimental Child Psychology* 39, 1–19.
- Bornstein, M. H., & Stiles-Davis, J. (1984). Discrimination and Memory for Symmetry in Young Children. *Developmental Psychology*, 20(4), 637–649.

- Boswell, S. (1976). Young Children's Processing of Asymmetrical and Symmetrical Patterns. *Journal of Experimental Child Psychology* (22), 309–318.
- Bromme, R. (1992). *Der Lehrer als Experte*. – Bern.
- Bromme, R. (1995). Was ist "pedagogical content knowledge"? Kritische Anmerkungen zu einem fruchtbaren Forschungsprogramm. In S. Hopmann & K. Riquarts (Hrsg.), *Didaktik und/oder Curriculum. Grundprobleme einer international vergleichenden Didaktik* (S. 105–113). Weinheim u. a.: Beltz.
- Bromme, R. (1997). Kompetenzen, Funktionen und unterrichtliches Handeln des Lehrers. In F. E. Weinert (Hrsg.), *Enzyklopädie der Psychologie. Pädagogische Psychologie* (Bd 3. Psychologie des Unterrichts und der Schule) (S. 177–212). Göttingen: Hogrefe.
- Bromme, R. (2008). Lehrerexpertise. In W. Schneider & M. Hasselhorn (Hrsg.), *Handbuch der Pädagogischen Psychologie* (S. 159-167). Göttingen: Hogrefe.
- Büchter, A. (2011). *Zur Erforschung von Mathematikleistung. Theoretische Studie und empirische Untersuchung des Einflussfaktors Raumvorstellung*, Technische Universität Dortmund.
- Carpenter, T. P., & Fennema, E. (1992). Cognitively guided instruction: Building on the knowledge of students and teachers. *International Journal of Educational Research*, 17, 457–470.
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (S. 420–464). Macmillan Publishing Co, Inc.
- Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences* (Revised edition). New York: Academic Press.
- Cooper, L.A. (1976). Individual differences in visual comparison processes. *Perception & Psychophysics*, 19(5), 433–444.
- Corbalis, M. C., & Roldan, C. E. (1974). On the Perception of Symmetrical and Repeated Patterns. *Perception & Psychophysics*, 16(1), 136–142.
- Denys, B., & Grenier, D. (1986). Symétrie orthogonale: des élèves français et japonais face à une même tâche de construction. *Petit x*, 12, 33–56.
- DMV, GDM, & MNU (2008). *Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik. Empfehlungen von DMV, GDM, MNU*. [https://www.mathematik.de/images/Presse/Presseinformationen/DMVGDM\\_MNU\\_Lehrerbildung2008.pdf](https://www.mathematik.de/images/Presse/Presseinformationen/DMVGDM_MNU_Lehrerbildung2008.pdf). Zugegriffen am 11.08.2020.
- Döhrmann, M., Kaiser, G., & Blömeke, S. (2010). Messung des mathematischen und mathematikdidaktischen Wissens: Theoretischer Rahmen und Teststruktur. In S. Blömeke, G. Kaiser & R. Lehmann (Hrsg.), *TEDS-M 2008. Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Primarstufenlehrkräfte im internationalen Vergleich* (S.169–194). Münster: Waxmann.
- Duit, R. (1999). Conceptual Change Approaches in Science Education. In W. Schnotz, S. Vosniadou, M. Carretero (Hrsg.), *New perspectives on conceptual change* (S. 263–282). Pergamon, Oxford UK.
- Feige, E.-M., Rutsch, J., Dörfler, T., & Rehm, M. (2017). Von der Alltagsvorstellung zum fachwissenschaftlichen Konzept. *Unterricht Chemie*, 159, 2–8.
- Fennema, E., Carpenter, T. P., Franke, M. L., Levi, L., Jacobs, V. R., & Empson, S. B. (1996). A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. In *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 403–434.
- Fisher, C. B., Ferdinandsen, K., & Bornstein, M. H. (1981). The role of Symmetry in Infant Form Discrimination. *Child Development*, 52(2), 457–462.

- Franke, M., & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule* (3. Aufl.). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.
- Gasteiger, H., & Benz, C. (2016). Mathematikdidaktische Kompetenz von Fachkräften im Elementarbereich – ein theoriebasiertes Kompetenzmodell. *Journal für Mathematik-Didaktik* 37, 263–287.
- Genkins, E. F. (1978). Der Begriff der Achsensymmetrie bei Kindern. *Der Mathematikunterricht*, 24(2), 20–43.
- Gillert, F. (2020). *Eine empirische Studie zur Erforschung des Einflusses von Raumvorstellung auf das Lösen von Aufgaben zur ebenen Abbildungsgeometrie bei Schülerinnen und Schülern in der Sekundarstufe I* (Unveröffentlichte Masterarbeit). Universität Osnabrück, Osnabrück.
- Götz, D. (2018). Typische Schülerfehler bei der Bestimmung von Symmetrieachsen – Eine Analyse von Schülerantworten. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Inhalte im Fokus – Mathematische Strategien entwickeln: Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2018* (S. 85-88). Bamberg: University of Bamberg Press.
- Götz, D. (2020): Die Rolle spezifischer Merkmale von Aufgaben zur Achsenspiegelung unter Berücksichtigung didaktischer und diagnostischer Aspekte. *Der Mathematikunterricht*, 66(6), 4–11.
- Götz, D., & Gasteiger, H. (2018a). Typische Schülerfehler bei der Achsenspiegelung – Eine Analyse von Schülerantworten. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (S. 631–634). Münster: WTM.
- Götz, D., & Gasteiger, H. (2018b). *Typische Schülerfehler bei der Achsenspiegelung – Eine Analyse von Schülerantworten*. Vortrag auf der 52. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM), Paderborn, 05.03. - 09.03.2018.
- Götz, D., & Gasteiger, H. (2019). Anforderungen bei der Achsenspiegelung. Ein empirisch gestütztes Kategorienschema. *Journal für Mathematik-Didaktik* 40(2), 289–322.
- Götz, D., & Gasteiger, H. (2020). Schwierigkeitsgenerierende Merkmale bei Aufgaben zur Achsenspiegelung. In A. Frank, S. Krauss & K. Binder (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2019* (S. 269–272). Münster: WTM-Verlag.
- Götz, D., Gasteiger, H., & Kühnhenrich, M. (2020). Einfluss von Merkmalen ebener Figuren auf das Erkennen von Achsensymmetrie – Eine Analyse von Aufgabenlösungen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 41(2), 523–554.
- Götz, D., & Gasteiger, H. (2022). Reflecting geometrical shapes: approaches of primary students to reflection tasks and relations to typical error patterns. *Educational Studies in Mathematics*.
- Götz, D., & Schulz, A. (2018). Aus Fehlern lernen. Schülerlösungen als Ausgangspunkt für Diagnose und Unterricht. *Grundschulmagazin*, 4, 33–37.
- Grenier, D. (1985a). Middle school pupils' conceptions about reflections according to a task of construction. In L. Streefland (Hrsg.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 1, S. 183–188). Utrecht: State University of Utrecht.
- Grenier, D. (1985b). Quelques aspects de la symétrie orthogonale pour des élèves de classes de 4<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup>. *Petit x*, 7, 57–69.
- Grohe, T. (2011). Achsensymmetrie. Durch ansprechende Handlungen trainieren und verbessern Kinder einer dritten Klasse ihr symmetrisches Verständnis. *Grundschulunterricht Mathematik* (1), 27–30.

- Grüßing, M. (2002). Wieviel Raumvorstellung braucht man für Raumvorstellungsaufgaben? Strategien von Grundschulkindern bei der Bewältigung räumlich-geometrischer Anforderungen. *ZDM*, 34(2), 37–45.
- Grüßing, M. (2012). *Räumliche Fähigkeiten und Mathematikleistung. Eine empirische Studie mit Kindern im 4. Schuljahr*. Münster: Waxmann.
- Hammer, S. (2016). *Professionelle Kompetenz von Mathematiklehrkräften im Umgang mit Aufgaben in der Unterrichtsplanung. Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchung*. Hildesheim: Franzbecker.
- Hasemann, K., & Gasteiger, H. (2020). *Anfangsunterricht Mathematik*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.
- Helmke, A. (2007). *Unterrichtsqualität - erfassen, bewerten, verbessern*. Seelze: Kallmeyer in Verbindung mit Klett.
- Helmke, A. (2017). *Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität – Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts*. Seelze-Velber: Kallmeyer in Verbindung mit Klett.
- Helmke, A., & Weinert, F. E. (1992). Bedingungsfaktoren schulischer Leistungen. In F. E. Weinert (Hrsg.), *Enzyklopädie der Psychologie. Pädagogische Psychologie* (Bd 3. Psychologie des Unterrichts und der Schule) (S. 72–176). Göttingen: Hogrefe.
- Hill, H. C., Schilling, S., & Ball, D. L. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *Elementary School Journal*, 105(1), 11–30.
- Höglinger, S., & Senftleben, H.-G. (1997). Schulanfänger lösen geometrische Aufgaben. *Grundschulunterricht*, 44(5), 36–39.
- Holland, G. (1975). Strategien zur Bildung geometrischer Begriffe. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 1975* (S. 59–68). Hannover: Schroedel.
- Hoyles, C., & Healy, L. (1997). Unfolding Meanings for Reflective Symmetry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2(1), 27–59.
- Just, M.A., & Carpenter, P.A. (1985). Cognitive Coordinate Systems: Accounts of mental rotation and individual differences in spatial ability. *Psychological Review*, 92(2), 137–172.
- Käser, U. (2011). Fehler begehen – Mathematik verstehen. Über die Bedeutung von Fehlern für das Verstehen. In M. Helmerich, K. Lengnink, G. Nickel, M. Rathgeb (Hrsg.), *Mathematik Verstehen* S. 167–178). Vieweg+Teubner.
- Kita, S., Alibali, M. W., & Chu, M. (2017). How Do Gestures Influence Thinking and Speaking? The Gesture-for-Conceptualization Hypothesis. *Psychological Review*, 124(3), 245–266.
- Klieme, E. (1986). Bildliches Denken als Mediator für Geschlechtsunterschiede beim Lösen mathematischer Probleme. In H.-G. Steiner (Hrsg.), *Grundfragen der Entwicklung mathematischer Fähigkeiten* (S. 133–151). Köln: Aulis-Verlag. Deubner.
- Klieme, E., Reiss, K., & Heinze, A. (2003). Geometrical competence and understanding of proof. In F. L. Lin (Hrsg.), *Proceedings of the International Conference on Science and Mathematics Learning*. Taipei.
- KMK (Kultusministerkonferenz) (2004a). *Gemeinsamer Rahmen der Länder für die frühe Bildung in Kindertageseinrichtungen*. [https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen\\_beschlesse/2004/2004\\_06\\_03-Fruhe-Bildung-Kindertageseinrichtungen.pdf](https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschlesse/2004/2004_06_03-Fruhe-Bildung-Kindertageseinrichtungen.pdf). Zugegriffen am 20.9.2020.
- KMK (Kultusministerkonferenz) (2004b). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003*. München: Wolters Kluwer Deutschland.

- KMK (Kultusministerkonferenz) (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004*. München, Neuwied: Luchterhand.
- KMK (Kultusministerkonferenz) (2008). *Ländergemeinsame inhaltliche Anforderungen für die Fachwissenschaften und Fachdidaktiken in der Lehrerbildung (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 16.10.2008 i. d. F. vom 16.05.2019)*. [https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen\\_beschluesse/2008/2008\\_10\\_16-Fachprofile-Lehrerbildung.pdf](https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2008/2008_10_16-Fachprofile-Lehrerbildung.pdf). Zugegriffen am 02.08.2008.
- KMK (Kultusministerkonferenz) (2013). *Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)* (auf Grundlage des Ländervergleichs 2011 überarbeitete Version in der Fassung vom 11. Februar 2013, Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen). [https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm/KSM\\_GS\\_Mathemati\\_4.pdf](https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm/KSM_GS_Mathemati_4.pdf). Zugegriffen am 9.11.2020.
- Kirsche, P. (1992). *Kongruenzabbildungen im Geometrieunterricht der Primarstufe*. Bad Salzdetfurth: Franzbecker.
- Kirsche, P. (1996). Zum Herstellen spiegelsymmetrischer und punktsymmetrischer Figuren im Unterricht der Primarstufe. *Der Mathematikunterricht*, 42(1), 5–13.
- Köller, L. (2019). *Vorgehensweisen von Kindern bei der Achsenspiegelung - Eine Interviewstudie in Jahrgangsstufe 4* (Unveröffentlichte Bachelorarbeit). Universität Osnabrück, Osnabrück.
- Köller, O., Rost, J., & Köller, M. (1994). Individuelle Unterschiede beim Lösen von Raumvorstellungsaufgaben aus dem IST- bzw. IST-70-Untertest „Würfelaufgaben“. *Zeitschrift für Psychologie*, 202(1), 65–85.
- Krauter, S., & Bescherer, C. (2013). *Erlebnis Elementargeometrie. Ein Arbeitsbuch zum selbstständigen und aktiven Entdecken* (2. Aufl.) Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.
- Krombholz, H. (1985). Motorik im Vorschulalter – Ein Überblick. *Motorik*, 8(5), 83-96.
- Küchemann, D. (1981). Reflections and rotations. In K. M. Hart (Hrsg.), *Children's Understanding of Mathematics* (S. 137–157). London: Murray.
- Kühnhenrich, M. (2018). *Untersuchung geometrischer Fähigkeiten von Grundschulkindern anhand von Aufgaben zur Symmetrie ebener Figuren mit verschiedenen Kompetenzanforderungen* (unveröffentlichte Masterarbeit). Universität Osnabrück, Osnabrück.
- Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S., & Neubrand, M. (Hrsg.) (2011). *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*. Münster u. a.: Waxmann.
- Kunter, M., Klusmann, U., Baumert, J., Richter, D., Voss, T., & Hachfeld, A. (2013). Professional Competence of Teachers: Effects on Instructional Quality and Student Development. *Journal of Educational Psychology*, 105(3), 805–820.
- Kurina, F., Ticha, M., & Hospesova, A. (1998). What geometric ideas do the preschoolers have?. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education*, 2(2), 57–69.
- Lima, I. (2006). *De la modélisation de connaissances des élèves aux décisions didactiques des professeurs: étude didactique dans le cas de la symétrie orthogonale* (Dissertation). Universität Joseph-Fourier, Grenoble, Frankreich.
- Linn, M., & Petersen, A.C. (1985). Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: A meta-analysis. *Child Development*, 56, 1479–1498.
- Loewenberg Ball, D. L., Thames, M. H., Phelps, G. C. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special?. *Journal of Teacher Education*, 59(5) 389–407.

- Lohman, D. F. (1979). Spatial ability: a review and reanalysis of the correlational literature. *Technical Report No. 8*. Stanford University.
- Lorenz, J. H., & Radatz, H. (1993). *Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht*. Hannover: Schroedel Schulbuchverlag.
- Lehmann, W., & Jüling, I. (2002). Raumvorstellungsfähigkeit und mathematische Fähigkeiten - unabhängige Konstrukte oder zwei Seiten einer Medaille?. *Psychologie in Erziehung und Unterricht*, 49(1), 31–43.
- Maier, P. H. (1999). *Räumliches Vorstellungsvermögen. Ein theoretischer Abriss des Phänomens räumliches Vorstellungsvermögen*. Donauwörth: Auer.
- Manger, T., & Eikeland, O.-J. (1998). The effects of spatial visualization and students' sex on mathematical achievement. *British Journal of Psychology*, 89(1), 17.
- Mayring, P. (2014). *Qualitative content analysis: theoretical foundation, basic procedures and software solution*. <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:0168-ssaoar-395173>. Zugegriffen am 07.05.2020.
- Munakata, Y. (2006). Information Processing Approaches to Development. In D. Kuhn, R. S. Siegler, W. Damon, & R. M. Lerner (Hrsg.), *Handbook of child psychology: Cognition, perception, and language* (S. 426–463). John Wiley & Sons Inc.
- Ng, O.-L., & Sinclair, N. (2015). Young children reasoning about symmetry in a dynamic geometry environment. *ZDM* 47(3), 421–434.
- Niedersächsisches Kultusministerium (2017). *Kerncurriculum für die Grundschule Schuljahrgänge 1–4. Mathematik*. <http://www.cuvo.nibis.de/>. Zugegriffen am: 07.09.2020.
- Niedersächsisches Kultusministerium (2018). *Orientierungsplan für Bildung und Erziehung*. [https://www.mk.niedersachsen.de/startseite/fruhkindliche\\_bildung/orientierungsplan/](https://www.mk.niedersachsen.de/startseite/fruhkindliche_bildung/orientierungsplan/). Zugegriffen am: 07.09.2020.
- Niedersächsisches Kultusministerium (2020). *Kerncurriculum für die Realschule Schuljahrgänge 5 – 10. Mathematik*. <https://cuvo.nibis.de/>. Zugegriffen am 01.12.2020.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1971). *Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde*. Stuttgart: Ernst Klett.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1972). *Die Psychologie des Kindes*. München: Deutscher Taschenbuchverlag.
- Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1974). *Die natürliche Geometrie des Kindes*. Stuttgart: Ernst Klett.
- Posner, G. J., Strike, K. A., Hewson, P. W., & Gertzog, W. A. (1982). Accommodation of a Scientific Conception: Toward a Theory of Conceptual Change. *Science Education* 66(2), 211–227.
- Putz-Osterloh, W. (1977). Über Problemlöseprozesse bei dem Test Würfelaufgaben aus dem Intelligenztest IST und IST-70 von Amthauer. *Diagnostica*, 23, 252–265.
- Radatz, H., & Rickmeyer, K. (1991). *Handbuch für den Geometrieunterricht an Grundschulen*. Hannover: Schroedel.
- Ramful, A., Ho, S. Y., & Lowrie, T. (2015). Visual and analytical strategies in spatial visualisation: perspectives from bilateral symmetry and reflection. *Mathematics Education Research Journal*, 27(4), 443–470.
- Reiss, K., & Winkelmann, H. (2008). Step by step. Ein Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik. *Grundschule*, 10, 34–37.

- Reiss, K., & Winkelmann, H. (2009). Kompetenzstufenmodelle für das Fach Mathematik im Primarbereich. In D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik* (S. 125–147). Weinheim und Basel: Beltz Verlag.
- Scheid, H., & Schwarz, W. (2017): *Elemente der Geometrie* (5. Aufl.) Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.
- Schmidt, R. (1986). *Geometrische Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten am Ende der Grundschulzeit: Ergebnisse einer Untersuchung*. Justus-Liebig-Universität. Gießen.
- Schrader, F.-W. (2013). Diagnostische Kompetenz von Lehrkräften. *Beiträge zur Lehrerinnen- und Lehrerbildung*, 31(2), 154–165.
- Schrader, F.-W., & Helmke, A. (2002). Alltägliche Leistungsbeurteilung durch Lehrer. In F. E. Weinert (Hrsg.), *Leistungsmessungen in Schulen* (S. 45 – 58). Weinheim & Basel: Beltz.
- Schultz, K. (1991). The Contribution of Solution strategy to spatial performance. *Canadian Journal of Psychology*, 45(4), 474–491.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher* 15, No. 2, 4–14.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review* 57(1), 1–22.
- Spychiger, M., Oser, F. Hascher, T., & Mahler, F. (1999). Entwicklung einer Fehlerkultur in der Schule. In W. Althof (Hrsg.), *Fehlerwelten. Vom Fehlermachen und Lernen aus Fehlern. Beiträge und Nachträge zu einem interdisziplinären Symposium aus Anlass des 60. Geburtstags von Fritz Oser*. Opladen: Leske + Budrich. 43–70.
- Stein, M. (1999). *Geometrie*. Heidelberg, Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.
- Tahri, S. (1993). *Modélisation de l'interaction didactique: un tuteur hybride sur Cabri-Géomètre pour analyse de decision didactiques* (Dissertation). Universität Joseph Fourier, Grenoble, Frankreich.
- Thames, M. H., & Loewenberg Ball, D. (2010). What knowledge does teaching require?. *Teaching Children Mathematics*, 17(4), 220–229.
- Thangamani, U., & Eu, L. K. (2019). Students' Achievement in Symmetry of Two-Dimensional Shapes Using Geometer's Sketchpad. *Malaysian Online Journal of Educational Sciences*, 7(1), 14–22.
- Thurstone, L. L. (1950). Some Primary Abilities in Visual Thinking. *Proceedings of the American Psychological Society*, 94(6), 517-521.
- Vollrath, H. J. (1984). *Methodik des Begriffslernens im Mathematikunterricht*. Stuttgart: Klett.
- Weinert, F.E., Schrader, F.-W., & Helmke, A. (1990). Unterrichtsexpertise – ein Konzept zur Verringerung der Kluft zwischen zwei theoretischen Paradigmen. In L.-M. Alisch, J. Baumert & K. Beck (Hrsg.), *Professionswissen und Professionalisierung* (S. 173–206). Braunschweig.
- Weinert F. E. (2001). Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In: F. E. Weinert (Hrsg.), *Leistungsmessungen in Schulen* (S. 17-31). Beltz: Weinheim.
- Weyl, H. (1980). *Symmetry*. Princeton: Princeton University Press.
- Weyl, H., Giuliani, D., Scholz, E., & Volkert, K. (2017). *Symmetrie – Ergänzt durch den Text, Symmetry and Congruence' aus dem Nachlass von Hermann Weyl* (3. Aufl.). Heidelberg: Spektrum.

- Wittmann, E. C. (1999). Konstruktion eines Geometriecurriculums ausgehend von Grundideen der Elementargeometrie. In H. Henning (Hrsg.), *Mathematik lernen durch Handeln und Erfahrung. Festschrift zum 75. Geburtstag von Heinrich Besuden* (S. 205–223). Oldenburg: Bültmann & Gerriets.
- Wollring, B. (2006). „Welche Zeit zeigt deine Uhr?“ Handlungsleitende Diagnostik für den Mathematikunterricht der Grundschule. *Stärken entdecken – Können entwickeln. Diagnostizieren und Fördern. Friedrich Jahresheft 2006*, 64-67.
- Xistouri, X. (2007). Students' ability in solving line symmetry tasks. *CERME 5*, 526–535.
- Xistouri, X., & Pitta-Pantazi, D. (2006). Spatial rotation and perspective taking abilities in relation to performance in reflective symmetry tasks. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N.'a. Stehlíková (Hrsg.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 5), 425–432.
- Xistouri, X., & Pitta-Pantazi, D. (2013). Using GeoGebra to develop primary school students' understanding of reflection. *North American GeoGebra Journal*, 2(1), 19–23.
- Zur Oeveste, H. (1987). *Kognitive Entwicklung im Vor- und Grundschulalter*. Göttingen: Hogrefe.

# Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Überblick über Facetten des professionellen Wissens für das Unterrichten im Allgemeinen (dick umrandet: inhaltsbezogene Facetten; gestrichelt umrandet: teils inhaltsbezogene Facetten; in blau: Facetten des Fachwissens; in gelb: Facetten des fachdidaktischen Wissens; in grün: Facetten des curricularen Wissens; in orange: Facetten des diagnostischen Wissens). .....	18
Abbildung 2: Zusammenspiel der Facetten professioneller Kompetenz mit dem Ziel diagnostischer Leistungen; die Kennzeichnung mit dem * stellt eine durch die Autorin vorgenommene Veränderung der ursprünglichen Definition nach Schrader (2013) dar. ....	32
Abbildung 3: Achsenspiegelung $\sigma_a$ an der Symmetrieachse $a$ (rechts: es entsteht eine achsensymmetrische Figur; links: es entstehen zwei zueinander kongruente Figuren) ...	40
Abbildung 4: Verschiebung $a \parallel b$ (links) und Drehung $a \# b$ (rechts) (aus Scheid & Schwarz 2017, S. 128) .....	41
Abbildung 5: Drehsymmetrische Figur: Drehung um $120^\circ$ und $240^\circ$ .....	42
Abbildung 6: Punktsymmetrische Figur: Drehung um $180^\circ$ .....	43
Abbildung 7: Fehler der Schülerinnen und Schüler bei der Spiegelung an schrägen Achsen – exemplarisch bei der Spiegelung einer Gerade (s). Verschiebung: (a) und (d). Spiegelung an einer gedachten vertikalen (b) oder horizontalen (c) Achse (Abbildung aus Grenier 1985b, S. 62). ....	54
Abbildung 8: Beispiele zu Fehlern in der Sekundarstufe aus Lima (2006, S. 160). Von links nach rechts: Spiegelung an einer gedachten vertikalen Achse, Verschiebung der Figur und Verlängerung von Teilen der Figur. ....	54
Abbildung 9: Einzeichnen von Symmetrieachsen aus dem Praxisbericht von Grohe (2011, S. 28) .....	56
Abbildung 10: Kategorienschema bezüglich schwierigkeitsgenerierender Merkmale bei der Achsenspiegelung und ihren Ausprägungen (ordinalskaliert angeordnet) (vgl. Götz & Gasteiger 2019, S. 316) .....	78
Abbildung 11: Typische Schülerfehler bei der Spiegelung der Achse nicht anliegender Figuren (vgl. Götz 2020; Götz & Gasteiger 2018b) .....	82
Abbildung 12: Beispielaufgaben „Rechteck ohne kleines schwarzes Kästchen“ aus der Studie Götz und Gasteiger (2018b) (links: entlang der Horizontalen ausgerichtet; rechts: entlang der Vertikalen ausgerichtet) .....	84
Abbildung 13: Beispiele der Verlängerung der Seiten der Figur (links: Verlängerung horizontal liegender Seiten der Figur; Mitte: Verlängerung außen liegender Seiten der Figur; rechts: Verlängerung der schräg liegenden Seiten der Figur). ....	85
Abbildung 14: Spiegelung an einer gedachten vertikalen Achse (links: Jahrgangsstufe 3; rechts: Jahrgangsstufe 7 und 4) .....	86
Abbildung 15: Fehler bei anliegenden Figuren in Jahrgangsstufe 3 (links: Mitspiegelung der Achse; rechts: Verschiebung der Figur) .....	86
Abbildung 16: (Drehsymmetrische) Ergänzung der Figuren (links: Jahrgangsstufe 7; rechts: Jahrgangsstufe 3) .....	87
Abbildung 17: Teils richtige Lösung in Jahrgangsstufe 7 .....	87
Abbildung 18: Aufgabenbeispiele aus der Studie Götz et al. (2020) (von links nach rechts: Diamant (achsen- und punktsymmetrisch), Windrad (drehsymmetrisch), Drachen (rein achsensymmetrisch), Dreistern (achsen- und drehsymmetrisch) und Parallelogramm (punktsymmetrisch)) (in Rot: Beispiele fehlerhaft eingezeichneter Achsen). ....	88

Abbildung 19: Von links nach rechts Schubfiguren (Doppeltes Pultdach und Doppelter Winkel), achsensymmetrische Schubfiguren (Doppelter Bogen und Doppeltes Boot) (in Rot: Beispiele fehlerhaft eingezeichneter Achsen).....	88
Abbildung 20: Zusammenfassung der vorkommenden Fehlerarten nach Arten der Symmetrieabbildungen (inkl. Parallelverschiebung). Fett gedruckt sind die Figuren, bei welchen der jeweilige Fehler am häufigsten auftritt (vgl. Götz et al. 2020, S. 545). .....	92
Abbildung 21: Aufgaben zur Achsenspiegelung der Studie Götz und Gasteiger (2022).....	94
Abbildung 22: Gesamtübersicht der Herangehensweisen bei der Bearbeitung der Aufgaben zur Achsen Spiegelung.....	97

## Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Evaluation im "Model of Pedagogical Reasoning and Action" aus Shulman (1987, S. 15) .....	28
Tabelle 2: Levels of understanding of reflection nach Küchemann (1981); Abbildungen vgl. Küchemann (1981, S. 149) .....	49
Tabelle 3: Lösungshäufigkeiten nach Arten der Symmetrieabbildungen inkl. Parallelverschiebung (in grau: achsensymmetrische Figuren; weiß hinterlegt: nicht-achsensymmetrische Figuren). Tabellenspalten 3 und 4 stellen stark vom Mittelwert abweichende Lösungshäufigkeiten innerhalb einer Art der Symmetrieabbildung dar. ....	90
Tabelle 4: Hauptkategorie "Eigenschaften der Achsenspiegelung" inkl. Unterkategorien.....	95
Tabelle 5: Hauptkategorie "Ganzheitliche Herangehensweisen" inkl. Unterkategorien .....	96
Tabelle 6: Hauptkategorie "Gesten und Handlungen, die den Spiegelungsprozess veranschaulichen " inkl. Unterkategorien .....	96
Tabelle 7: Hauptkategorie "Mentale Bilder, die den Spiegelungsprozess veranschaulichen " inkl. Unterkategorien .....	96

# Eigenständigkeit

## Erklärung über die Eigenständigkeit der erbrachten wissenschaftlichen Leistung

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus anderen Quellen direkt oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet.

Bei der Auswahl und Auswertung folgenden Materials haben mir die nachstehend aufgeführten Personen in der jeweils beschriebenen Weise entgeltlich / unentgeltlich geholfen.

1. Die Erstellung der Aufgaben, welche Basis der Studie Götz et al. (2020) waren, wurde von Maria Kühnhenrich unentgeltlich im Rahmen ihrer Masterarbeit durchgeführt und von mir unterstützt.
2. Die Interviews der Studie Götz und Gasteiger (2020) wurden von Laura Köller und Lena Schoppmeyer im Rahmen ihrer Bachelorarbeiten unentgeltlich durchgeführt.
3. Die Transkription der Videos der Studie Götz und Gasteiger (2022) wurde in Teilen von Frau Laura Köller als studentische Hilfskraft entgeltlich durchgeführt.

Weitere Personen waren an der inhaltlichen materiellen Erstellung der vorliegenden Arbeit nicht beteiligt.

Insbesondere habe ich hierfür nicht die entgeltliche Hilfe von Vermittlungs- bzw. Beratungsdiensten (Promotionsberater oder andere Personen) in Anspruch genommen. Niemand hat von mir unmittelbar oder mittelbar geldwerte Leistungen für Arbeiten erhalten, die im Zusammenhang mit dem Inhalt der vorgelegten Dissertation stehen.

Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

.....

(Ort, Datum)

.....

(Unterschrift)

