Optimale Strategien für spezielle Reparatursysteme

Fachbereich Mathematik/Informatik
der Universität Osnabrück

Dissertation

von

Peter Bruns

Die Gutachter dieser Arbeit sind:

Prof. Dr. Wolfgang Stadje von der Universität Osnabrück und

Prof. Dr. Uwe Jensen von der Universität Ulm.

Osnabrück, im Mai 1999

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Dr. Wolfgang Stadje
für die wertvollen Anregungen und Diskussionen
in bezug auf diese Dissertation.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation und Inhalt

Im 15. Jahrhundert wurde das Buchhaltungssystem entwickelt. Schon zu einem solch frühen Zeitpunkt hat daher die Mathematik Einfluß auf Teile der Betriebswirtschaftslehre genommen. Dieser Einfluß wurde im Laufe der Jahrhunderte bekanntlich noch intensiviert. Dies geschieht auch in dieser Arbeit: spezielle Kostenmodelle für den Einsatz von Maschinen werden aus stochastischer Sicht näher untersucht. Um näher an das hier behandelte Thema herangeführt zu werden, versetze man sich in die Lage von Firmenbesitzern oder Einkäufern von großen Firmen, die für ihre Produktionshallen diese Maschinen kaufen möchten. Diese Großkunden berücksichtigen aus betriebswirtschaftlicher Sicht neben den Anschaffungskosten immer mehr die Betriebs- und Wartungskosten der Maschinen. Eine von Bo Bergman [4] angeführte Faustregel besagt, daß allein die Wartungskosten ungefähr 50% der Anschaffungskosten ausmachen. Bergman [4] führt weiterhin an, daß die Wartungskosten nach Angaben der Dänischen Wartungsgesellschaft in Dänemark 6-8% des Bruttosozialprodukts betragen. Argumente dieser Art haben dazu geführt, daß in drei Modellen dieser Arbeit (Kapitel 2, 3 und 5) sowohl die Betriebskosten als auch die Wartungskosten behandelt werden. Bei einer Anlage mit gegebenen Betriebskosten, Reparaturkosten und Daten über das stochastischen Abnutzungsverhalten werden neben mathematischen Eigenschaften dieser Modelle Berechnungsverfahren und Eigenschaften von Reparaturstrategien angegeben, die die Betriebs- und Wartungskosten minimieren. Demnach gelingt es, die minimalen Betriebs- und Wartungskosten einer Anlage zu bestimmen. Diese drei Kapitel sind jeweils nach den beiden folgenden Arten der Kostenbetrachtung aufgeteilt: im ersten Teil werden diskontierte Kosten betrachtet und im zweiten Teil Durchschnittskosten.

Wie Bo Bergman [4] weiterhin angeführt hat, geht es bei Anlagen, die Menschenleben gefährden können – dazu zählen insbesondere einige Energiegewinnungsanlagen wie zum Beispiel Kernkraftwerke oder auch einige Verkehrsmittel wie zum Beispiel Flugzeuge – nicht ausschließlich um die Minimierung der Wartungs- und Ausfallkosten, sondern auch um die Einhaltung hoher Sicherheitsschranken für Ausfallwahrscheinlichkeiten. In den USA kann wegen der dortigen Gesetzgebung der bei Systemausfall möglicherweise eintretende menschliche Schaden überdies noch einen sehr hohen wirtschaftlichen Schaden zur Folge haben. In den Kapiteln 4 und 6 werden Modelle unter diesem Gesichtspunkt behandelt. Hier werden keine Betriebs- und Wartungskosten behandelt, sondern es werden Strategien angegeben, bei denen diese Strafkosten unter Einhaltung dieser Sicherheitsschranke minimiert werden.

1.2 Die Modelle

In den drei ersten Modellen wird der Zeitabstand zweier aufeinanderfolgender Inspektionen als konstant vorausgesetzt. Unter einer Strategie δ wird für alle natürlichen Zahlen n unter $T_n^\delta - := T_n^\delta - \epsilon$ der n-te Inspektionszeitpunkt für ein fest vorgegebenes $\epsilon > 0$ verstanden, das die Länge der Zeitspanne angibt, die generell für Inspektion einschließlich Reparatur zur Verfügung gestellt wird. Dieses ϵ sei vernachlässigbar. Der Zustandsraum der in den Kapiteln 2 und 4 vorgestellten Modelle sei $I = \{0, ..., N\}$ für ein $N \in I\!N$ oder $I = Z\!\!Z^+$. In dem Modell des dritten Kapitels wird I auf $I\!R^+$ oder $[0, N]$ für ein $N \in I\!R^+$ verallgemeinert. In allen Modellen werden die stochastischen Prozesse $(X_n^{\delta,-})_{n \in N}$ und $(X_n^\delta)_{n \in Z\!\!Z^+}$ definiert, die Werte in I annehmen. X_n^δ $(X_n^{\delta,-})$ gibt für alle n aus $I\!N$ den Zustand des Systems zur Zeit T_n^δ $(T_n^\delta -)$, also nach (vor) der $(n-1)$-ten Reparatur an, und X_0^δ gibt den Originalzustand an. Je höher der Zustand ist, je schlechter ist der Zustand des Systems; der Zustand 0 repräsentiert somit ein System, daß neu ist oder sich zumindest so verhält wie ein neues. Die Zustandsänderung, die nur durch den Betrieb hervorgerufen wird, erfüllt die Markov-Eigenschaft. Würde man nie reparieren, würden die $(X_n^\delta)_{n \in N}$ somit eine Markov-Kette in diskreter Zeit bilden: Die Wahrscheinlichkeit $P(X_{n+1}^\delta = i_{n+1} | X_n^\delta = i_n, X_{n-1}^\delta = i_{n-1}, ..., X_0^\delta = i_0)$ für $(i_j)_{j=0}^{n+1} \subset I$ würde also im Falle der minimalen Reparatur - dies bedeutet Inspektion mit Reparatur ohne Zustandsverbesserung - nur von i_n, i_{n+1} und $T_n^\delta - T_{n-1}^\delta$ abhängen. Eine Besonderheit dieser Arbeit ist, daß sie auch nicht von dem Wert $T_n^\delta - T_{n-1}^\delta$ abhängt. In den ersten drei Modellen ist dies wegen der Identität $T_n^\delta - T_{n-1}^\delta = 1$ für alle $n \in I\!N$ offensichtlich. Aber auch in den anderen Modellen wird dies so gehandhabt. Es wird davon ausgegangen, daß die Verschlechterung stoßweise stattfindet und die Stärke der Verschlechterung unabhängig von der Zeit ist, die seit der letzten Verschlechterung vergangen ist.

An dieser Stelle sei bemerkt, daß maximale Reparatur vollständige Reparatur des Systems bedeutet. Der Zustand des Systems nach der Reparatur hat also den Wert Null. Die Zufallsvariable A_n wiederum gibt die n-te Aktion an, also um wieviele Zustände das System durch Reparatur zur Zeit T_n^δ verbessert wird.

Ein System in Betrieb kann nur *abnutzen* und sich nicht eigenständig verbessern, so daß im diskreten Fall verlangt wird, daß alle Wahrscheinlichkeiten $p_{ij} := P(X_{n+1}^- = j|X_n = i)$ verschwinden, bei denen j kleiner als i ist. Im stetigen Fall wird auf die entsprechende Eigenschaft am Anfang des dritten bzw. fünften Kapitels hingewiesen.
Als letztes finden nun noch die Kosten Erwähnung: Im n-ten Zeitintervall $[T_n^\delta, T_{n+1}^\delta)$, $n \in I\!N$, fallen die Betriebskosten $r(i)$ an, falls der Zustand des Systems zur Zeit T_n^δ i ist und die Reparaturkosten $d(j, \delta(j))$, falls vor der nächsten Reparatur der Zustand $j \in I\!N$ ist. Hierbei ist δ die Strategie, die bestimmt, wieviel repariert wird, also um wieviele Einheiten der Zustand des Systems verbessert wird. Die Betriebskosten (Energie-, Personalkosten, etc.) werden nachschüssig nach einer Betriebsperiode beglichen, also fast gleichzeitig mit den anschließenden Reparaturkosten. Dieser Sachverhalt ist wichtig für den Fall, daß die Kosten diskontiert sind.
Bei den hier behandelten Reparaturmodellen sind alle Informationen über das stochastische Abnutzungsverhalten gegeben. Kostenfunktionen sind entweder gegeben oder können konstruiert werden, so daß es in jedem Modell die Aufgabe ist, entweder diskontierte Kosten oder Durchschnittskosten zu minimieren. Daher ist diese Arbeit dem Bereich *stochastische Optimierung* des umfangreichen Forschungsgebietes *maintenance models* (Wartungsmodelle) aus der Stochastik zuzuordnen: Unmittelbar vor Beendigung dieser Arbeit waren im Internet-Katalog des Zentralblattes für Mathematik (http://www.emis.de/cgi-bin/MATH) 1317 Veröffentlichungen unter der Rubrik *maintenance* zu finden.

1.2.1 Verwandte Reparatursysteme in der Literatur

Viele Autoren haben sich mit Reparatursystemen beschäftigt, die sich stochastisch verschlechtern. Diese Arbeit befaß sich mit sogenannten *prepardness models*, wie sie erstmals von McCall [19] genannt worden sind. Dabei handelt es sich um Systeme, bei denen der Systemzustand nur durch eine Inspektion ermittelt werden kann. In den meisten dieser Modelle ist zwischen den beiden Entscheidungen auszuwählen, entweder das System zu ersetzen oder es laufen zu lassen. Dies trifft auch auf die beiden Ersetzungsmodelle (Kapitel 4 und 6) zu, die hier behandelt werden. Einer der Pioniere auf diesem Gebiet war Luss [17], der einen endlichen Zustandsraum $\{0, 1, ..., L\}$ betrachtete, bei dem der Zustand L ein ausgefallenes System repräsentiert. Er betrachtete konstante Ersetzungskosten für ein nicht-ausgefallenes System und Zustands-abhängige Wartungskosten, um die erwarteten Durchschnittskosten für ein Zeitintervall zu minimieren. Unter Verwendung einer iterativen Prozedur zeigte er die Optimalität von Kontrollgrenzenstrategien. Diese werden auch hier unter der Bezeichnung *bang-bang Strategien mit Schwellenwert* verwendet. Zuckerman [24] veränderte später das Modell von Luss folgendermaßen: Er verallgemeinerte den Zustandsraum und ging näher auf die Verschlechterung des Systems ein. Ähnlich wie in dem hier vorgestellten System mit randomisierten Wartungsabständen wird sie durch einen Markovschen Schockprozess verursacht. Zuckerman ermittelte eine Bedingung, unter der auch in seinem Modell die Durchschnittskosten durch eine Kontrollgrenzenstrategie minimiert wurden.

In allen hier vorgestellten Modellen wird nicht ausschließlich nach einem Systemausfall repariert. Die ersten Modelle dieser Art wurden von Derman [8] und Ross [20] entwickelt, die die Basis-Modelle dieser Arbeit bilden: der Zustand des Systems, das zur Zeit $t \in \mathbb{Z}^+$ inspiziert wird, ist ein Element von $\{0, ..., N\}$ bei Derman [8] und $\mathbb{Z}^+$ bei Ross [20]. Der Zustand 0 steht für ein neues System, und je höher der Zustand ist, umso schlechter ist das System. Der Aktionsraum ist sowohl bei Derman [8] als auch bei Ross [20] endlich. Es gibt eine Kosten- bzw. Ertragsfunktion, die nur vom Systemzustand und der gewählten Aktion abhängt. Die Zustandsveränderung innerhalb des Zeitintervalls $[n, n+1)$ ist Markovsch und hängt nur von dem Zustand des Systems zur Zeit n ab.

Die Modelle, die in den Kapiteln 2, 3 und 5 behandelt werden, erlauben das Teilreparieren. Einige Autoren befaßten sich mit der Thematik dieser unvollständigen Reparatur. Einer der ersten Forscher auf diesem Gebiet war Klein [15], der ein System mit Markovscher Verschlechterung und einer endlichen Anzahl von Reparaturstufen betrachtete. In seinem Modell wird nach jeder Reparatur über die Anzahl von Zeitintervallen entschieden, über die das Modell nicht überprüft wird. Je länger das Modell nicht überprüft wird, umso mehr Inspektionskosten werden natürlich eingespart. Klein gab ein lineares Programm an, welches die Strategie ermittelt, die die Durchschnittskosten minimiert. Stadje und Zuckerman [22] erweiterten ebenfalls die Modelle von Derman [8] und Ross [20]. Aber sie benutzten eine Output-Funktion, eine Kostenfunktion und eine ebenfalls endliche Anzahl von Reparaturstufen. Sie ermittelten Bedingungen, bei denen Strategien der Gestalt (j, l) mit j kleiner als l die Durchschnittskosten minimieren: Ein System, welches sich in einem Zustand größer als $l - 1$ befindet, wird so repariert, daß es sich anschließend im Zustand j befindet. Beispiele haben gezeigt, daß es in ihrem Modell tatsächlich besser sein kann, unvollständig zu reparieren. Unter der Bedingung, daß sich dieses System während eines Zeitintervalls nur um eine Stufe verschlechtern oder ganz ausfallen kann, berechnete Lesanovsky [13] diejenige Strategie (j, l), die die diskontierten Kosten minimiert, und zusammen mit Kasumu [16] diejenige, die die Durchschnittskosten minimiert. In den zuletzt angesprochenen Modellen entspricht der Systemzustand dem Alter der Maschine, während er - wie schon erwähnt - bei allen Modellen, die in dieser Arbeit besprochen werden, durch Inspektion ermittelt werden muß. In dem Modell von Makis und Jardine [18] hängt der Systemzustand von beidem ab: einem stochastischen Diagnose-Prozeß und dem System-Alter. An dieser Stelle sei das Beispiel des Metall-Anteils im Maschinenöl erwähnt, welches sie anführen und das in der folgenden Form auf das erste Modell dieser Arbeit anwendbar ist:

- N ist die konstante Menge Öl, die die Maschine benötigt.

- X_n^- (X_n) ist der prozentuale Anteil von Metall-Partikeln im Maschinenöl vor (nach) der $n-$ten 'Reparatur'.
- I ist durch 100 beschränkt. ($N = 100$).
- $X_n^- = i$ und $A_n = a$ bedeutet, $\frac{aN}{i}$ Liter Öl durch neues Öl auszutauschen.
- Die Betriebskosten können hier als 'negative Produktionsleistung' der Maschine angesehen werden in Abhängigkeit von der Güte des Öls, und die Reparaturkosten sind die Kosten des entsprechenden Ölaustausches. Auch hier sind die Kosten zu minimieren.

In einer weiteren Veröffentlichung von Stadje und Zuckerman [21] ist ebenfalls das unvollständige Reparieren erlaubt. In dem Modell werden einige Eigenschaften der Kostenfunktion für ein System mit zufälliger Lebenszeit bewiesen. Zusätzliche Bedingungen werden gefunden, unter denen eine Strategie optimal ist, die nur vollständig repariert. Letzteres geschieht auch in den Modellen dieser Arbeit, die in den Kapiteln 2, 3 und 5 vorgestellt werden.

Ein Modell, in dem es beides gibt, sowohl das unvollständige Reparieren als auch das Ersetzen des Systems, wird von Kijima [14] vorgestellt. Hier wird das System periodisch zu den Zeitpunkten, T, $2T$, $3T$,... ersetzt und bei einem Ausfall unverzüglich repariert. Diese Reparatur kann aber unvollständig ausfallen. Kijma ermittelte einen optimalen Wert für T und eine Strategie, die die erwarteten Durchschnittskosten pro Zeitintervall minimiert.

Das Modell von Douer und Yechiali [9] weist einige Ähnlichkeiten mit dem ersten Modell dieser Arbeit auf. Sie benutzten einen endlichen Zustandsraum $\{0, ..., N\}$, erwartete Herstellungskosten $r_k \geq 0$ für das nächste Zeitintervall, wenn der Systemzustand am Anfang des Zeitintervalls k ist und Reparaturkosten $c_{ik} \geq 0$, wenn der Systemzustand durch die Reparatur von i nach k verbessert wurde. Demnach wird also ebenfalls unvollständiges Reparieren zugelassen. Sie fanden Bedingungen, unter denen sowohl die diskontierten als auch die Durchschnittskosten von Strategien aus der Klasse der verallgemeinerten Kontrollgrenzenstrategien minimiert werden. Eine Kontrollgrenzenstrategie, wie sie z.B. von Derman [8] und Ross [20] benutzt wird, ist eine Strategie, die ein System genau dann ersetzt, wenn der Systemzustand größer oder gleich einem bestimmten Zustand $k \in I\!N$ ist. Eine verallgemeinerte Kontrollgrenzenstrategie ist eine Strategie, die das System in irgendeiner Weise repariert, wenn der Zustand des Systems diesen ausgezeichneten Wert k überschritten hat. Auf das Modell von Douer und Yechiali [9] wird im ersten Modell dieser Arbeit im Satz 13 noch näher eingegangen. Eine Zusammenfassung aller Artikel, die sich mit der Wartung solcher Systeme beschäftigen und bis 1989 veröffentlicht wurden, ist von Valdes-Florez [23] erschienen.

Ein Reparatursystem mit einem endlichen Zustandsraum $\{0, ..., N\}$ und unvollständiger Reparatur kann auch als spezielles $N-$Komponenten Ersetzungsproblem identifiziert werden: Der Zustand des Systems gibt die Anzahl der ausgefallenen Komponenten an. Da unvollständige Reparatur auch die Ersetzung nur einiger ausgefallener Komponenten beinhaltet, handelt es sich bei so einem Modell um ein System mit *grouping corrective maintenance* entsprechend der Notation von Dekker und Wildeman [7]. Solch ein Modell mit Ähnlichkeiten zu dem Modell mit konstanten Wartungszeiten dieser Arbeit wurde von Assaf und Shantikumar [1] in deren Problem II behandelt. Allerdings ist bei Ihnen die Zeitspanne bis zur nächsten Inspektion nicht festgelegt: sie ist eine Zufallsvariable. Die Kosten der vollständigen Reparatur von n der ausgefallenen Komponenten ist linear in n. Assaf und Shantikumar [1] betrachten ebenfalls die Kosten, die durch den Produktionsausfall wegen ausgefallener Maschinen entstanden sind. Sie zeigen, daß eine Kontrollgrenzenstrategie $f(n, t_0, ..., t_n)$ mit Schwellenwert n und der Zeit t_i, die bis zur nächsten Inspektion zu warten ist, wenn i Maschinen ausgefallen sind $(t_{i+1} \leq t_i)$, die erwarteten Kosten pro Zeitintervall über einen unendlichen Horizont minimiert. Für Weiteres über Mehr-Komponenten-Systeme sei auf die Zusammenfassung von Cho und Parlar [6] verwiesen.

Eine Übersicht über alle Arten von Reparaturmodellen und den Autoren, die sich besonders mit den entsprechenden Modellen vor 1985 befaßt haben, steht in dem langen Artikel von Bo Bermann [4]. Eine aktuelle Übersicht ist in dem Buch 'Stochastic Models in Reliability' von Terje Aven und Uwe Jensen [2] zu finden. Hier sind alle wichtigen Modelle mathematisch ausführlich beschrieben.

1.2.2 Notationen

- Auf der Teilmenge I von $\mathbb{R}^+$ heißt eine Funktion f genau dann *monoton nicht-wachsend (monoton nicht-fallend)*, wenn die folgende Implikation gilt:

$$x \geq y \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) \geq f(y) \quad \forall x, y \in I.$$

  Dies wird hier manchmal mit $f(x) \uparrow (x)$ bezeichnet und sollte nicht mit $f(x) \uparrow z$ für $x \to x_0$ verwechselt werden, denn letzteres bedeutet bekanntlich $\lim_{x \to x_0} f(x) = z$ und $f(x) \uparrow (x)$.

- Auf der Teilmenge I von $\mathbb{R}^+$ heißt eine Funktion f genau dann *konkav (konvex)*, wenn

$$f(x+2h) - f(x+h) \leq f(x+h) - f(x) \quad (... \geq ...) \quad \text{für } [x, x+2h] \subset I.$$

- Stochastische Begriffe wie (bedingte) Wahrscheinlichkeit, (bedingter) Erwartungswert, stochastischer Prozeß, Stopzeit, Satz von Beppo-Levy, Lebesguescher Konvergenzsatz, ... werden als bekannt vorausgesetzt und daher nicht erklärt.

- Unter den *Durchschnittskosten* sind generell die Durchschnittskosten pro Zeiteinheit bei unendlichem Horizont zu verstehen.

- $(*)$ und $(**)$ sind lokale Verweise, die hauptsächlich in Beweisen verwendet werden. Dann beziehen sie sich immer auf denselben Beweis.

Kapitel 2

Das System mit konstanten Wartungsabständen

In den ersten beiden Systemen, die in dieser Arbeit behandelt werden, sind die Inspektionszeitpunkte äquidistant angeordnet. Der Zustandsraum ist $I = \{0, 1, ..., N\}$ oder $I = \mathbb{Z}^+$. Ist letzteres der Fall, wird der Zustandsraum auch als $I = \{0, 1, ..., N\}$ bezeichnet mit der Wahl $N = \infty$. Die Strategie δ ist eine Familie von Zufallsvariablen $\{\delta_n(j),\ n \in \mathbb{N},\ j \in I\}$ auf I mit $P(\delta_n(j) = a) = P_\delta(A_n = a | X_n = j) =: q_j^{\delta,n}(a)$. Ist die Strategie δ stationär, dann ist die letzte Wahrscheinlichkeit unabhängig von n, so daß die Wahrscheinlichkeit $q_j^{\delta,n}$ mit q_j^δ bezeichnet wird. Somit kann dann die Strategie δ mit der Menge von Zufallsvariablen $\{q_j^\delta, j \in I\}$ identifiziert werden. Die Situation im n-ten Zeitintervall für ein $n \in \mathbb{N}$ wird in der folgenden Tabelle anschaulich dokumentiert, mit $i,\ a,\ j\ \in I$, $i \leq j$ und $a \leq j$:

Zeit	n		$n+1-\epsilon$		$n+1$
Zufallsvariable	X_n		X_{n+1}^-		X_{n+1}
Zustand	i	$\longrightarrow$	j	$\xrightarrow{A_n=a}$	$j-a$
Wahrscheinlichkeit		p_{ij}		$q_j^\delta(a)$	
Kosten			$r(i)$		$d(j,a)$
Kostenbezeichnung			Betriebskosten		Reparaturkosten

Es gelten die folgenden Voraussetzungen: Seien $i, j, a\ \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ll} (1) & p_{ij} = 0 \qquad \forall j < i \\ (2) & q_j^\delta(a) = 0 \qquad \forall a > j,\ \text{da}\ \delta(j) \leq j \qquad \forall \delta \in \Pi_1. \end{array}$$

Dabei sei Π_1 der Raum aller oben beschriebenen Strategien. Die Zufallsvariabeln X_n und X_n^- hängen sicherlich immer von der gewählten Strategie δ ab, aber aus Übersichtsgründen ist bei Klarheit darauf verzichtet worden, immer das δ an diese Größen anzuhängen.

Das in dieser Arbeit erlaubte Teilreparieren von a Einheiten im Zustand $i \geq a$ kann

auch ähnlich wie bei Lesanovsky ([13] und [16]) so interpretiert werden, daß ein System vom Zustand i durch ein System vom Zustand $i-a$ ausgetauscht wird.
Als letztes wird für eine stationäre Strategie δ die folgende Wahrscheinlichkeit angegeben:

$$P_\delta\left(X_{n+1}=j|X_0,A_1,X_1,A_2,\cdots,X_{n-1},A_n,X_n=i\right)=\sum_{k=j}^{N}p_{ik}q_k^\delta(k-j)\text{ f.s.}$$

2.1 Der diskontierte Fall

Die Kosten sind in den Abschnitten 2.1 und 4.1 mit einem Diskontierungsfaktor $\alpha\in(0,1)$ versehen. Die Motivation, diskontierte Kosten zu betrachten, ist in der Betriebswirtschaftslehre anzutreffen: Wenn $\rho\cdot 100$ die Zinsrate in Prozent für ein Zeitintervall ist, müßte man für ein festes $n\in\mathbb{N}$ nach der $n-$ten Zeitperiode $(1+\rho)^nA$ DM zurückzahlen, um am Anfang des ersten Zeitintervalls A DM zu erhalten. A DM nach n Zeitintervallen entsprechen also dem gegenwärtigen Wert von $\frac{A}{(1+\rho)^n}=\alpha^nA$ DM mit $\alpha:=(1+\rho)^{-1}$.

Nun folgt die mathematische Beschreibung dieses Modells: Es sei P die $I\times I$ Matrix mit dem Element p_{ij} in der $i-$ten Zeile und $j-$ ten Spalte. $p_{ij}^{(n)}$ sei wiederum das Element der $i-$ten Zeile und $j-$ ten Spalte der $n-$fachen Potenzmatrix P^n von P. Als erstes wird vorausgesetzt, daß $\forall i\in I\ \exists B_i\in\mathbb{R}^+,\kappa_i\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{j=i}^{N}p_{ij}^{(n)}\left(\max_{\{0\le k_1\le j\}}\{|r(k_1)|\}+\max_{\{0\le k_3\le k_2\le j\}}\{|d(k_2,k_3)|\}\right)<B_in^{\kappa_i}\ \forall n\in\mathbb{Z}^+.\quad\text{(Bedingung A)}$$

Außerdem ist die Dermansche Bedingung erfüllt, die später noch einmal näher als Voraussetzung (2) vorgestellt wird:

$\sum_{j=k}^{N}p_{ij}$ ist monoton nicht-fallend in $i\in I$ für alle $k\in I$.

Als nächstes wird die Wertfunktion angegeben, die die erwarteten diskontierten Kosten liefert:

$$V_{\delta,\alpha}(i)=E\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^nc_\delta(n)\middle|X_0=i\right).$$

Dabei sind $c_\delta(n)=r(X_n)+d(X_{n+1}^-,\ \delta_{n+1}(X_{n+1}^-))$ die Kosten, die im (n+1)-ten Zeitintervall auftreten, wenn die Politik δ gewählt wird.
Eine faire Versicherung - eine Versicherung ohne erwarteten Gewinn und Verlust - würde somit zum Zeitpunkt 0 den Betrag $V_{\delta,\alpha}(i)$ verlangen, wenn sie für sämtliche zukünftige Kosten aufkommt, die unter der Strategie δ und dem Diskontierungsfaktor α anfallen und der Anfangszustand der Maschine i ist.
Die Diskontierung in diesem Modell wird jeweils vom Zeitpunkt 1 aus betrachtet, also

dem Zeitpunkt, an dem die ersten Kosten anfallen. Die α-diskontierten Kosten sind auf den Zeitpunkt 0 bezogen und unter der Strategie δ offensichtlich durch die Funktion $\alpha V_{\delta,\alpha}(X_0)$ zu ermitteln. Die erwarteten Kosten des $(n+1)-$ten Zeitintervalls sind

$$E\left(c_\delta(n)\right) = r(X_n) + \sum_{j=0}^{N} P(X_{n+1}^- = j|X_n) \sum_{a=0}^{j} d(j,a) q_j^\delta(a) \; \forall i \in I\!N.$$

Dies kann zusammengefaßt werden zu der Identität

$$V_{\delta,\alpha}(i) = E_\delta \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left(r(X_n) + \sum_{j=0}^{N} P(X_{n+1}^- = j|X_n) \sum_{a=0}^{j} d(j,a) q_j^\delta(a) \right) \middle| X_0 = i \right).$$

In dem ersten Satz wird die Wohldefiniertheit von $V_{\delta,\alpha}$ sichergestellt. Für den Beweis wird das folgende Lemma benötigt. Hier wird die Strategie δ_∞ verwendet, die bang-bang Strategie mit Schwellenwert ∞. Bang-bang Strategien werden später definiert. Bei der Strategie δ_∞ handelt es sich einfach um die Strategie, die – unabhängig vom Systemzustand – immer mit Wahrscheinlichkeit 1 die Aktion 0 wählt, also das System fast sicher nie verbessert.

Lemma 1 *Aus* $X_0^{\delta_\infty} = X_0^\delta$ *folgt* $\left(X_n^{\delta_\infty} \overset{st}{\geq} X_n^\delta \; \forall n \in I\!N \text{ und } X_n^{\delta_\infty,-} \overset{st}{\geq} X_n^{\delta,-} \; \forall n \in I\!N \right)$.

Dieses Lemma wird durch vollständige Induktion unter Verwendung der Bedingung von Derman (Voraussetzung (2)) **bewiesen**:

$n = 1:$ $\quad X_0^{\delta_\infty} = X_0^\delta \Rightarrow X_1^{\delta_\infty,-} \overset{D}{=} X_1^{\delta,-}$. $X_1^{\delta_\infty} = X_1^{\delta_\infty,-}$ und $X_1^\delta \leq X_1^{\delta,-}$ führen zu $X_1^{\delta_\infty} \overset{st}{\geq} X_1^\delta$ und natürlich gilt auch $X_1^{\delta_\infty,-} \overset{st}{\geq} X_1^{\delta,-}$.

$n \to n+1:$

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1}^{\delta_\infty,-} \geq k) &= \sum_{i=0}^{N} P\left(X_{n+1}^{\delta_\infty,-} \geq k \,\middle|\, X_n^{\delta_\infty} = i\right) P\left(X_n^{\delta_\infty} = i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{N} \left(\sum_{j=k}^{N} p_{ij} \right) P\left(X_n^{\delta_\infty} = i\right) = E\left(f_k\left(X_n^{\delta_\infty}\right)\right) \text{ mit } f_k(i) := \sum_{j=k}^{N} p_{ij} \\
&\geq E\left(f_k\left(X_n^\delta\right)\right) \text{ weil } f_k(i+1) \geq f_k(i) \; \forall i \in I \text{ und } X_n^\delta \overset{st}{\leq} X_n^{\delta_\infty} \\
&= P\left(X_{n+1}^{\delta,-} \geq k\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; X_{n+1}^{\delta_\infty,-} \overset{st}{\geq} X_{n+1}^{\delta,-}, \text{ und somit ist } X_{n+1}^{\delta_\infty} = X_{n+1}^{\delta_\infty,-} \overset{st}{\geq} X_{n+1}^{\delta,-} \geq X_{n+1}^\delta.$$

Damit ist der Induktionsbeweis vollzogen. ■

Satz 1 $|V_{\delta,\alpha}(i)| \leq |r(i)| + \tilde{B}_i^\alpha < \infty$ *mit* $\tilde{B}_i^\alpha := B_i \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} n^{\kappa_i}$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
|V_{\delta,\alpha}(i)| &= \left| E_\delta \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n (r(X_n) + d(X_{n+1}^-, \delta(X_{n+1}^-)) \middle| X_0 = i \right) \right| \\
&= \left| r(i) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} \left(d(X_n^-, \delta(X_n^-)) + \alpha r(X_n) \right) \right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq |r(i)| + E_\delta\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}\left(\max_{\{0\le k_3\le k_2\le X_n^-\}}\{|d(k_2,k_3)|\} + \alpha\max_{\{0\le k_1\le X_n\}}\{|r(k_1)|\}\middle| X_0=i\right)\right)\\
&\overset{\text{Lemma 1}}{\leq} |r(i)| + E_{\delta_\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}\left(\max_{\{0\le k_3\le k_2\le X_n^-\}}\{|d(k_2,k_3)|\} + \alpha\max_{\{0\le k_1\le X_n\}}\{|r(k_1)|\}\middle| X_0=i\right)\right)\\
&\overset{B.L.}{=} |r(i)| + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}E_{\delta_\infty}\left(\max_{\{0\le k_3\le k_2\le X_n^-\}}\{|d(k_2,k_3)|\} + \alpha\max_{\{0\le k_1\le X_n\}}\{|r(k_1)|\}\middle| X_0=i\right)\\
&\leq |r(i)| + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}\sum_{j=i}^{N}p_{ij}^{(n)}\left(\max_{\{0\le k_3\le k_2\le j\}}\{|d(k_2,k_3)|\} + \max_{\{0\le k_1\le j\}}\{|r(k_1)|\}\right)\\
&\leq |r(i)| + B_i\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}(n+1)^{\kappa_i} = |r(i)| + \tilde{B}_i^\alpha < \infty.
\end{aligned}
$$

$\overset{B.L.}{=}$ bedeutet, daß nach dem Satz von **B**eppo **L**evy in dieser Gleichung das Vertauschen von Summation ($\sum_{n=1}^{\infty}$) und Integration (E_{δ_∞}) wegen der nicht-negativen Ausdrücke erlaubt ist. In der nächsten Gleichung wird die Identität $E_{\delta_\infty}(X_n^-|X_0=i) = E_{\delta_\infty}(X_n|X_0=i) = \sum_{j=i}^{N}p_{ij}^{(n)}\cdot j$ verwendet. Die Konvergenz der letzten Reihe folgt aus dem Quotientenkriterium und sichert somit die Wohldefiniertheit von $V_{\delta,\alpha}$ $\forall(\delta,\alpha)\in(\Pi_1,[0,1])$. ■

Nach der Bedingung A wird nun die Bedingung B definiert:

Bedingung B: $\lim_{n\to\infty}\alpha^n\sum_{j=i}^{N}p_{ij}^{(n)}\left(\max_{k\in\{0,\ldots,j\}}\{|r(k)|+\tilde{B}_k^\alpha\}\right) = 0 \quad \forall i\in I\ \ \forall\alpha\in[0,1).$

Während die Bedingung A in diesem Modell immer gilt, wird die Bedingung B explizit aufgeführt, wenn sie gelten soll. Eigenschaften der Bedingung B werden im folgenden Lemma angegeben:

Lemma 2

1. *Wenn die Kostenfunktionen beschränkt sind (z.B. $N<\infty$), können die Folgen $(B_i)_{i\in I}$ und $(\kappa_i)_{i\in I}$ so gewählt werden, daß für die zugehörige Folge $(\tilde{B}_i^\alpha)$ die Bedingung B erfüllt ist.*

2. *Aus Bedingung B folgt* $\lim_{n\to\infty}\alpha^n E\left(V_{\delta,\alpha}(X_n^\delta)\middle| X_0=i\right) = 0\ \forall\delta\in\Pi_1\quad\forall i\in I\ \forall\alpha\in[0,1)$.

Beweis: Wenn die Kostenfunktionen durch die Konstante C beschränkt sind, können alle Konstanten $B_i=2C$ und $\kappa_i=0$ gewählt werden. Somit ist $\tilde{B}_i^\alpha=\frac{2C}{1-\alpha}$ für alle $i\in I$ und die Bedingung B erfüllt. Der erste Teil ist somit klar, und der zweite Teil gilt wegen

$$\lim_{n\to\infty}\alpha^n|E(V_{\delta,\alpha}(X_n^\delta)|X_0=i)| \quad\leq\quad \lim_{n\to\infty}\alpha^n E_\delta\left(|r(X_n)|+\tilde{B}_{X_n}^\alpha|X_0=i\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \quad \lim_{n\to\infty} \alpha^n E_\delta \left(\max_{\{0\leq k\leq X_n\}} \left\{ |r(k)| + \tilde{B}_k^\alpha \right\} \middle| X_0 = i \right) \\
&\overset{\text{Lemma 1}}{\leq} \quad \lim_{n\to\infty} \alpha^n E_{\delta_\infty} \left(\max_{\{0\leq k\leq X_n\}} \left\{ |r(k)| + \tilde{B}_k^\alpha \right\} \middle| X_0 = i \right) \\
&= \quad \lim_{n\to\infty} \alpha^n \sum_{j=i}^{N} p_{ij}^{(n)} \left(\max_{k\in\{0,\ldots,j\}} \left\{ |r(k)| + \tilde{B}_k^\alpha \right\} \right) = 0. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Als nächstes wird die folgende Teilmenge von $\mathcal{F}(I) := \{u | u : I \to I\!R\}$ definiert:

$$
\mathcal{U}(I) := \left\{ u \in \mathcal{F}(I) \middle| \lim_{n\to\infty} \alpha^n \sum_{j=i}^{N} p_{ij}^{(n)} \max_{\{0\leq k\leq j\}} \{|u(k)|\} = 0 \; \forall i \in I \; \forall \alpha \in (0,1) \right\}.
$$

Die Bedingung B verlangt gerade, daß jede Funktion u_α mit $u_\alpha(i) := r(i) + \tilde{B}_i^\alpha \; \forall i \in I$ ein Element von $\mathcal{U}(I)$ ist. Eigenschaften dieser Klasse werden im folgenden Lemma notiert: Die erste folgt aus der gleichen Abschätzungsidee mit Hilfe der Strategie δ_∞ wie im Beweis von Satz 1, und die zweite folgt direkt aus Lemma 2(2). Um die Aussage in bezug auf die Grenzfunktionen von Teil (3) einzusehen, ist im Beweis von Lemma 2(2) lediglich die Funktion $V_{\delta,\alpha}$ durch die erwähnte Grenzfunktion auszutauschen:

Lemma 3

1. *Für alle $u \in \mathcal{U}(I)$ gilt:* $\lim_{n\to\infty} \alpha^n E_\delta(u(X_n) \mid X_0 = i) = 0 \; \forall i \in I \; \forall \delta \in \Pi_1$.

2. *Unter der Bedingung B sind alle Funktionen $V_{\delta,\alpha}$ in $\mathcal{U}(I)$ enthalten und im Falle der Existenz auch Grenzfunktionen der Gestalt* $\lim_{n\to\infty} V_{\delta_n,\alpha}$ *mit* $\delta_n \in \Pi_1 \; \forall n \in I\!N$.

Die Verwendung des Prinzips der dynamischen Programmierung ergibt sofort, daß die folgende Funktionalgleichung von der Kostenfunktion $V_{\delta,\alpha}$ erfüllt wird:

$$
V_{\delta,\alpha}(i) = r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \sum_{a=0}^{j} q_j^\delta(a) \left(d(j,a) + \alpha V_{\delta,\alpha}(j-a) \right).
$$

Ist die Strategie δ nicht-randomisiert, reduziert sich die Gleichung zu

$$
V_{\delta,\alpha}(i) = r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij}(d(j,\delta(j)) + \alpha V_{\delta,\alpha}(j-\delta(j)).
$$

Im folgenden wird die Optimalitätsgleichung dieses Modells vorgestellt. In der Literatur wird sie oft auch als Bellman-Gleichung bezeichnet. Die hier angeführte Beweisführung ist eine schon seit einigen Jahrzehnten existierende Methode, um Optimalitätsgleichungen zu beweisen (siehe z.B. Ross, [20], Kapitel II.2).
An dieser Stelle sei noch einmal daran erinnert, daß der Fall $N = \infty$ zugelassen ist.

Satz 2 *Die optimale Kostenfunktion* $V_\alpha(i) := \inf_{\{\delta\in\Pi_1\}}\{V_{\delta,\alpha}(i)\}$ *erfüllt die folgende Optimalitätsgleichung:*

$$V_\alpha(i) = r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \min_{a\in\{0,\dots,j\}} \{d(j,a) + \alpha V_\alpha(j-a)\}.$$

Beweis von '$\geq$':

$$\begin{aligned}
V_{\delta,\alpha}(i) &= r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \sum_{a=0}^{j} q_j^\delta(a)\,(d(j,a) + \alpha V_{\delta,\alpha}(j-a)) \qquad \forall \delta \in \Pi_1 \\
&\geq r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \sum_{a=0}^{j} q_j^\delta(a)\,(d(j,a) + \alpha V_\alpha(j-a)). \\
\text{Somit ist } V_{\delta,\alpha}(i) &\geq r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \min_{a\in\{0,\dots,j\}} \{d(j,a) + \alpha V_\alpha(j-a)\} \qquad \forall \delta \in \Pi_1, \\
\text{also } V_\alpha(i) &\geq r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \min_{a\in\{0,\dots,j\}} \{d(j,a) + \alpha V_\alpha(j-a)\}.
\end{aligned}$$

Beweis von '$\leq$': Es sei für alle ganzzahligen Werte j $\;a_0(j) \in \{0,\dots,j\}$ das a, für das der Klammerausdruck in der letzten Ungleichung minimiert wird. Nun sei δ die Strategie, die nach der ersten Inspektion im Zustand j, $j \in I$ die Aktion $a_0(j)$ wählt und danach mit einer Strategie δ^j übereinstimmt, für die gilt: $V_{\delta^j}(j) \leq V_\alpha(j) + \epsilon$, $\epsilon > 0$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
V_\alpha(i) &\leq V_{\delta,\alpha}(i) \\
&= r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \Big(d(j, a_0(j) + \alpha V_{\delta^j,\alpha}(j - a_0(j))\Big) \\
&\leq r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \left(d(j, a_0(j)) + \alpha(V_\alpha(j - a_0(j)) + \epsilon)\right) \\
&= r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \left(d(j, a_0(j)) + \alpha V_\alpha(j - a_0(j))\right) + \alpha \cdot \epsilon \\
&= r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \min_{a\in\{0,\dots,j\}} \{d(j,a) + \alpha V_\alpha(j-a)\} + \alpha \cdot \epsilon.
\end{aligned}$$

Der Grenzübergang $\epsilon \downarrow 0$ liefert die folgende Ungleichung:

$$V_\alpha(i) \leq r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \min_{a\in\{0,\dots,j\}} \{d(j,a) + \alpha V_\alpha(j-a)\}. \quad \blacksquare$$

Um die Existenz einer optimalen nicht-randomisierten Strategie beweisen zu können, wird das folgende Lemma benötigt. Hier wird die Funktion $V_{\delta,\alpha}^{(n)}$ verwendet, die die erwarteten $\alpha-$diskontierten Kosten unter der Strategie δ angibt, die in den ersten n Zeitintervallen anfallen:

Lemma 4
Es sei $V_{\delta,\alpha}^{(n)}(i) = E\left(\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k c_\delta(k)\Big| X_0 = i\right)$ $\forall n \in I\!N$ $\forall \delta \in \Pi_1$. *Nun sei* $\delta \in \Pi_1$ *fest gewählt. Dann gelten für die stationären Strategien* δ_α, $\delta_{\epsilon,\alpha}$ *und* $\tilde{\delta}_{\epsilon,\alpha}$, *die durch die folgende Gleichung und die folgenden Ungleichungen definiert sind:*

$$\begin{aligned} d(j,\delta_\alpha(j)) + \alpha V_\alpha(j-\delta_\alpha(j)) &= \min_{a\in\{0,\dots,j\}}\{d(j,a)+\alpha V_\alpha(j-a)\} \quad \forall j \in I, \\ d(j,\delta_{\epsilon,\alpha}(j)) + \alpha V_\alpha(j-\delta_{\epsilon,\alpha}(j)) &\le \min_{a\in\{0,\dots,j\}}\{d(j,a)+\alpha V_\alpha(j-a)\} + \epsilon \quad \forall j \in I, \end{aligned}$$

$$|d(j,\tilde{\delta}_{\epsilon,\alpha}(j)) + \alpha V_{\delta,\alpha}(j-\tilde{\delta}_{\epsilon,\alpha}(j)) - (d(j,\delta(j)) + \alpha V_{\delta,\alpha}(j-\delta(j)))| \le \epsilon \; \forall j \in I;$$

die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} &(1) \quad V_\alpha(i) = V_{\delta_\alpha,\alpha}^{(n)}(i) + \alpha^n E_{\delta_\alpha}\left(V_\alpha(X_n)\right| X_0 = i) \quad \forall n \in I\!N, \\ &(2) \quad V_{\delta_{\epsilon,\alpha},\alpha}^{(n)}(i) \le V_\alpha(i) - \alpha^n E_{\delta_{\epsilon,\alpha}}\left(V_\alpha(X_n)\right| X_0 = i) + \frac{\epsilon}{1-\alpha} \quad \forall n \in I\!N, \\ &(3) \quad \left|V_{\delta,\alpha}(i) - \left(V_{\tilde{\delta}_{\epsilon,\alpha},\alpha}^{(n)}(i) + \alpha^n E_{\tilde{\delta}_{\epsilon,\alpha}}(V_{\delta,\alpha}(X_n) \mid X_0 = i)\right)\right| \le \frac{\epsilon}{1-\alpha} \quad \forall n \in I\!N. \end{aligned}$$

Zunächst wird der **Beweis** von (1) durch vollständige Induktion vorgerechnet:
$n = 1$: Die Optimalitätsgleichung lautet:

$$\begin{aligned} V_\alpha(i) &= r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \min_{a\in\{0,\dots,j\}}\{d(j,a)+\alpha V_\alpha(j-a)\} \\ &= r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij}\left(d(j,\delta_\alpha(j)) + \alpha V_\alpha(j-\delta_\alpha(j))\right) \\ &= r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} d(j,\delta_\alpha(j)) + \alpha\sum_{j=i}^{N} p_{ij} V_\alpha(j-\delta_\alpha(j)) \\ &= V_{\delta_\alpha,\alpha}^{(1)}(i) + \alpha^1 E_{\delta_\alpha}\left(V_\alpha(X_1)\right| X_0 = i). \end{aligned}$$

$n \to n+1$: Aus dem Induktionsanfang folgt:

$$\begin{aligned} V_\alpha(X_n) &= V_{\delta_\alpha,\alpha}^{(1)}(X_n) + \alpha E_{\delta_\alpha}\left(V_\alpha(X_{n+1})\right| X_n) \\ \Rightarrow E_{\delta_\alpha}\left(V_\alpha(X_n)\right| X_0 = i) &= E_{\delta_\alpha}\left(V_{\delta_\alpha,\alpha}^{(1)}(X_n)\Big| X_0 = i\right) + \alpha E_{\delta_\alpha}\left(V_\alpha(X_{n+1})\right| X_0 = i). \end{aligned}$$

Diese Identität, in die Induktionsvoraussetzung eingesetzt, ergibt:

$$\begin{aligned} V_\alpha(i) &= V_{\delta_\alpha,\alpha}^{(n)}(i) + \alpha^n E_{\delta_\alpha}\left(V_{\delta_\alpha,\alpha}^{(1)}(X_n)\Big| X_0 = i\right) + \alpha^{n+1} E_{\delta_\alpha}\left(V_\alpha(X_{n+1})\right| X_0 = i) \\ &= V_{\delta_\alpha,\alpha}^{(n)}(i) + \alpha^n E\left(c_{\delta_\alpha}(n)\right| X_0 = i) + \alpha^{n+1} E_{\delta_\alpha}\left(V_\alpha(X_{n+1})\right| X_0 = i) \\ &= E_{\delta_\alpha}\left(V_{\delta_\alpha,\alpha}^{(n+1)}(i)\right) + \alpha^{n+1} E_{\delta_\alpha}\left(V_\alpha(X_{n+1})\right| X_0 = i). \end{aligned}$$

Somit ist der Induktionsbeweis von (1) vollzogen. Um (2) zu beweisen, wird durch vollständige Induktion über $n \in I\!N$ für alle $i \in I$ die folgende Behauptung gezeigt:

$$V_\alpha(i) = V_{\delta_{\epsilon,\alpha},\alpha}^{(n)}(i) + \alpha^n E_{\delta_{\epsilon,\alpha}}(V_\alpha(X_n)|X_0 = i) - \sum_{k=1}^{n}\alpha^{k-1}\epsilon_k(i) \text{ für } 0 \le \epsilon_k(i) \le \epsilon \quad \forall k \in I\!N.$$

$n = 1:$

$$\begin{aligned} V_\alpha(i) &= r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \min_{a\in\{0,j\}} \{d(j,a) + \alpha V_\alpha(j-a)\} \\ &= r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij}(d(j,\delta_{\epsilon,\alpha}(j)) + \alpha V_\alpha(j-\delta_{\epsilon,\alpha}(j)) - \tilde{\epsilon}_1(j)) \text{ für } 0 \le \tilde{\epsilon}_1(j) \le \epsilon \\ &= V^{(1)}_{\delta_{\epsilon,\alpha},\alpha}(i) + \alpha E_{\delta_{\epsilon,\alpha}}(V_\alpha(X_1) \mid X_0 = i) - \underbrace{\sum_{j=i}^{N} p_{ij}\tilde{\varepsilon}_1(j)}_{=:\varepsilon_1(i)}. \end{aligned}$$

$n \to n+1$: Aus dem Induktionsanfang folgt:

$$\begin{aligned} V_\alpha(X_n) &= V^{(1)}_{\delta_{\epsilon,\alpha},\alpha}(X_n) + \alpha E_{\delta_{\epsilon,\alpha}}(V_\alpha(X_{n+1}) \mid X_n) - \epsilon_1(X_n) \\ \Rightarrow E_{\delta_{\epsilon,\alpha}}(V_\alpha(X_n) \mid X_0 = i) &= E_{\delta_{\epsilon,\alpha}}(V^{(1)}_{\delta_{\epsilon,\alpha},\alpha}(X_n) \mid X_0 = i) + \alpha E_{\delta_{\epsilon,\alpha}}(V_\alpha(X_{n+1}) \mid X_0 = i) \\ &\quad - E_{\delta_{\epsilon,\alpha}}(\epsilon_1(X_n) \mid X_0 = i). \end{aligned}$$

Nun sei $\epsilon_{n+1}(i) := E_{\delta_{\epsilon,\alpha}}(\epsilon_1(X_n) \mid X_0 = i) : I \to [0,\epsilon]$. Dann ist

$$E_{\delta_{\epsilon,\alpha}}(V_\alpha(X_n) \mid X_0 = i) = E_{\delta_{\epsilon,\alpha}}(V^{(1)}_{\delta_{\epsilon,\alpha},\alpha}(X_n) \mid X_0 = i) + \alpha E_{\delta_{\epsilon,\alpha}}(V_\alpha(X_{n+1}) \mid X_0 = i) - \epsilon_{n+1}(i).$$

Diese Identität wird nun in die Induktionsvoraussetzung eingesetzt:

$$\begin{aligned} V_\alpha(i) &= V^{(n)}_{\delta_{\epsilon,\alpha},\alpha}(i) + \alpha^n E_{\delta_{\epsilon,\alpha}}(V^{(1)}_{\delta_{\epsilon,\alpha},\alpha}(X_n) \mid X_0 = i) + \alpha^{n+1} E_{\delta_{\epsilon,\alpha}}(V_\alpha(X_{n+1}) \mid X_0 = i) \\ &\qquad -\alpha^n \epsilon_{n+1}(i) - \sum_{k=1}^{n} \alpha^{k-1}\epsilon_k(i) \\ &= V^{(n+1)}_{\delta_{\epsilon,\alpha},\alpha}(i) + \alpha^{n+1} E_{\delta_{\epsilon,\alpha}}(V_\alpha(X_{n+1}) \mid X_0 = i) - \sum_{k=1}^{n+1} \alpha^{k-1}\epsilon_k \text{ wie im Beweis von Teil 1.} \end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsschluß gelungen, und die Aussage von (2) folgt aus $0 \le \sum_{k=1}^{n} \alpha^{k-1}\epsilon_k(i) \le \frac{\epsilon}{1-\alpha}\ \forall n \in I\!N$.
Bei (3) wird durch vollständige Induktion die folgende Identität gezeigt:

$$V_{\delta,\alpha}(i) = V^{(n)}_{\tilde{\delta}_\epsilon,\alpha}(i) + \alpha^n E_{\tilde{\delta}_\epsilon}(V_{\delta,\alpha}(X_n) \mid X_0 = i) - \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \alpha^{k-1} \text{ mit } -\epsilon < \epsilon_k < \epsilon\ \forall k \in I\!N :$$

Der Induktionsschluß ist analog zum Induktionsschluß von (2). Es verändert sich lediglich der Induktionsanfang:

$$\begin{aligned} V_{\delta,\alpha}(i) &= r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij}(d(j,\delta(j)) + V_{\delta,\alpha}(j-a)) \\ &= r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij}(d(j,\tilde{\delta}_{\epsilon,\alpha}(j)) + \alpha V_{\delta,\alpha}(j-\tilde{\delta}_{\epsilon,\alpha}(j)) - \tilde{\epsilon}_1(j)) \text{ für } -\epsilon < \tilde{\epsilon}_1(j) < \epsilon \\ &= V^{(1)}_{\tilde{\delta}_{\epsilon,\alpha},\alpha}(i) + \alpha E_{\tilde{\delta}_{\epsilon,\alpha}}(V_{\delta,\alpha}(X_1) \mid X_0 = i) - \underbrace{\sum_{j=i}^{N} p_{ij}\tilde{\epsilon}_1(j)}_{=:\epsilon_1(i)}. \end{aligned}$$

Hier ist $|\sum_{k=1}^{n} \alpha^{k-1}\epsilon_k(i)| \le \frac{\alpha}{1-\epsilon}\ \forall n \in I\!N$, so daß (3) folgt. ■

Satz 3 über die Existenz einer optimalen Strategie
Die Voraussetzung B sei erfüllt.

1. *Es sei δ_α eine stationäre und deterministische Strategie, derart daß*

$$d(j,\delta_\alpha(j)) + \alpha V_\alpha(j-\delta_\alpha(j)) = \min_{a\in\{0,\ldots,j\}} \{d(j,a)+\alpha V_\alpha(j-a)\} \quad \forall j \in I.$$

   Dann ist δ_α optimal in bezug auf die $\alpha-$diskontierten Kosten, somit gilt die Identität $V_{\delta_\alpha,\alpha} = V_\alpha$.

2. *Es sei $\delta_{\epsilon,\alpha}$ eine stationäre und deterministische Strategie, die die folgende Ungleichung erfüllt:*

$$d(i,\delta_{\epsilon,\alpha}(i) + \alpha V_\alpha(i-\delta_\alpha(i)) \le \min_{a\in\{0,\ldots,i\}} \{d(i,a)+\alpha V_\alpha(i-a)\} + (1-\alpha)\epsilon \quad \forall i \in I.$$

   Dann gilt $V_{\delta_{\epsilon,\alpha},\alpha} \le V_\alpha + \epsilon$, also $\lim_{\epsilon\downarrow 0} V_{\delta_{\epsilon,\alpha},\alpha} = V_\alpha\ \forall \alpha \in (0,1)$.

   $\delta_{\epsilon,\alpha}$ heißt auch $\epsilon-$optimale Strategie in bezug auf die $\alpha-$diskontierten Kosten.

3. *Es sei für eine feste Strategie $\delta \in \Pi_1$ $\tilde{\delta}_{\epsilon,\alpha}$ die stationäre und deterministische Strategie, die die folgende Ungleichung erfüllt:*

$$\left| d(i,\tilde{\delta}_{\epsilon,\alpha})(i) + \alpha V_{\delta,\alpha}(i-\tilde{\delta}_{\epsilon,\alpha}(i)) - [d(i,\delta(i)) + \alpha V_{\delta,\alpha}(i-\delta(i))] \right| \le (1-\alpha)\epsilon.$$

   Dann gilt $|V_{\tilde{\delta}_{\epsilon,\alpha},\alpha} - V_{\delta,\alpha}| \le \epsilon$, also $\lim_{\epsilon\downarrow 0} V_{\tilde{\delta}_{\epsilon,\alpha},\alpha} = V_{\delta,\alpha}$.

Die letzte Aussage wird lediglich der Vollständigkeit halber angegeben. Natürlich hat sie nichts mit Optimalität zu tun. Sie wird auch im Gegensatz zu den anderen Aussagen im weiteren Verlauf nicht mehr benötigt.

Beweis: Das Lemma 4 mit dem Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt:

$$\begin{aligned} V_\alpha(i) &= V_{\delta_\alpha,\alpha}(i) + \lim_{n\to\infty} \alpha^n E_{\delta_\alpha}\left(V_\alpha(X_n)\right| X_0 = i), \\ V_{\delta_{\epsilon,\alpha},\alpha}(i) &\le V_\alpha(i) + \lim_{n\to\infty} \alpha^n E_{\delta_{\epsilon,\alpha}}\left(V_\alpha(X_n)\right| X_0 = i) + \epsilon, \end{aligned}$$

und $|V_{\delta,\alpha}(i) - V_{\tilde{\delta}_{\epsilon,\alpha},\alpha}(i) + \lim_{n\to\infty} \alpha^n E_{\tilde{\delta}_{\epsilon,\alpha}}(V_{\delta,\alpha}(X_n)|X_0 = i)| \le \epsilon$.

Damit folgt die Behauptung des Satzes aus dem zweiten Teil von Lemma 2 bzw. Lemma 3.

Die Identität $\lim_{\epsilon\downarrow 0} V_{\delta_{\epsilon,\alpha},\epsilon}(0) = V_\alpha$ folgt auch aus einem einfachen Argument: Es sei $A_\alpha(j)$ die Menge aller Werte $a_0 \in \{0,...,j\}$, für die $d(j,a_0) + \alpha V_\alpha(j-a_0) > \min_{\{a\in\{0,\ldots,j\}\}}\{d(j,a)+\alpha V_\alpha(j-a)\}$ gilt. Nun sei $\epsilon_0 = \min_{\{a\in A_\alpha(j)\}}\{d(j,a)+\alpha V_\alpha(j-a)\} - \min_{\{a\in\{0,\ldots,j\}\}}\{d(j,a)+\alpha V_\alpha(j-a)\}$. Dann stimmt für alle $\epsilon < \frac{\epsilon_0}{1-\alpha}$ die Strategie $\delta_{\epsilon,\alpha}$ mit der Strategie δ_α überein, so daß diese Identität direkt aus dem ersten Teil dieses Lemmas folgt. ∎

Für den weiteren Verlauf werden die folgenden Definitionen eingeführt:
$\delta : I \to I$ sei eine stationäre Strategie;
$T_{\delta,\alpha}$ und $T_\alpha : \mathcal{F}(I) \to \mathcal{F}(I)$ seien folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned}
(T_{\delta,\alpha}(u))(i) &:= r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \left(d(j, \delta(j)) + \alpha u(j - \delta(j)) \right). \\
(T_\alpha(u))(i) &:= r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \min_{a \in \{0,\dots,j\}} \left(d(j,a) + \alpha u(j-a) \right).
\end{aligned}$$

Die Funktionalgleichung der Kostenfunktion $V_{\delta,\alpha}$ ergibt $V_{\delta,\alpha} = T_{\delta,\alpha} V_{\delta,\alpha}$, und die Optimalitätsgleichung entspricht der Identität $V_\alpha = T_\alpha V_\alpha$.

Es sei $\mathcal{B}(I) \subset \mathcal{F}(I)$ der Raum aller beschränkten Funktionen von I nach $I\!R$. Im Fall $N < \infty$ stimmen $\mathcal{F}(I)$ und $\mathcal{B}(I)$ offensichtlich miteinander überein.

Lemma 5 *Der Operator T_α ist kontrahierend auf $\mathcal{B}(I)$.*

Beweis: Es seien u und v zwei Elemente aus $\mathcal{B}(I)$ und δ_v die stationäre Strategie, für die gilt:

$$d(j, \delta_v(j)) + \alpha v(j - \delta_v(j)) = \min_{a \in \{0,\dots,j\}} \{d(j,a) + \alpha v(j-a)\}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
& T_\alpha u(i) - T_\alpha v(i) \\
= \; & r(i) + \sum_{j=i}^{\infty} p_{ij} \min_{a \in \{0,\dots,j\}} \{d(j,a) + \alpha u(j-a)\} - \left(r(i) + \sum_{j=i}^{\infty} p_{ij} \min_{a \in \{0,\dots,j\}} \{d(j,a) + \alpha v(j-a)\} \right) \\
= \; & \sum_{j=i}^{\infty} p_{ij} \left(\min_{a \in \{0,\dots,j\}} \{d(j,a) + \alpha u(j-a)\} - \left(d(j, \delta_v(j)) + \alpha v(j - \delta_v(j)) \right) \right) \\
\le \; & \sum_{j=i}^{\infty} p_{ij} \left(d(j, \delta_v(j)) + \alpha u(j - \delta_v(j)) - \left(d(j, \delta_v(j)) + \alpha v(j - \delta_v(j)) \right) \right) \\
= \; & \alpha \sum_{j=i}^{\infty} p_{ij} \left(u(j - \delta_v(j)) - v(j - \delta_v(j)) \right) \; = \; \alpha \sum_{j=i}^{\infty} p_{ij} \left((u-v)(j - \delta_v(j)) \right) \\
\le \; & \alpha ||u - v||_\infty \quad \forall i \in I.
\end{aligned}$$

Das Vertauschen der Rollen von u und v ergibt $||T_\alpha u - T_\alpha v||_\infty \le \alpha ||u - v||_\infty$. ■

Lemma 6 *Nun werde $T_\alpha : \mathcal{F}(I) \to \mathcal{F}(I)$ betrachtet, also auch auf unbeschränkte Funktionen angewendet. Außerdem sei $u \in \mathcal{F}(I)$. Dann gilt:*

(a) $u \ge T_\alpha u$ *und* $(u \in \mathcal{U}(I)$ *oder* $(u \ge 0)) \;\Rightarrow\; u \ge V_\alpha$,

(b) $u \le T_\alpha u$ *und* $u \in \mathcal{U}(I) \;\Rightarrow u \le V_\alpha$.

Beweis: Für ein festes $\alpha \in (0,1)$ und ein u aus $\mathcal{F}(I)$ wähle genauso wie im letzten Lemma $\delta_u(j)$ den Wert a aus $\{0,1,\dots,j\}$, der die Funktion $d(j,a)+\alpha u(j-a)$ minimiert. Dann gilt

$$T_\alpha u(i) = r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij}(d(j,\delta_u(j)) + \alpha u(j-\delta_u(j))) \quad \forall i \in I.$$

Beweis von (a): Zunächst erhält man durch vollständige Induktion die Ungleichung

$$u(i) \geq E_{\delta_u}\left[\sum_{t=0}^{n-1} \alpha^t c_{\delta_u}(t) + \alpha^n u(X_n) \middle| X_0 = i\right] \quad \forall i \in I.$$

$$\begin{aligned} n=1: \quad u(i) \geq T_\alpha u(i) &= r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij}(d(j,\delta_u(j)) + \alpha u(j-\delta_u(j))). \\ &= E_{\delta_u}\left(c_{\delta_u}(0) + \alpha u(X_1) \middle| X_0 = i\right) \quad \forall i \in I; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n \to n+1: \; u(i) &\geq E_{\delta_u}\left[\sum_{t=0}^{n-1} \alpha^t c_{\delta_u}(t) + \alpha^n u(X_n) \middle| X_0 = i\right] \\ &\geq E_{\delta_u}\left[\sum_{t=0}^{n-1} \alpha^t c_{\delta_u}(t) + \alpha^n T_\alpha u(X_n) \middle| X_0 = i\right] \\ &\geq E_{\delta_u}\left[\sum_{t=0}^{n-1} \alpha^t c_{\delta_u}(t) + \alpha^n \left(E_{\delta_u}(c_{\delta_u}(n)) + \alpha u(X_{n+1}) | X_n\right) \middle| X_0 = i\right] \\ &= E_{\delta_u}\left[\sum_{t=0}^{n} \alpha^t c_{\delta_u}(t) + \alpha^{n+1} u(X_{n+1}) \middle| X_0 = i\right] \quad \forall i \in I. \end{aligned}$$

Der Induktionsbeweis ist somit gelungen, und es gilt:

$$\begin{aligned} u(i) &\geq E_{\delta_u}\left[\sum_{t=0}^{n-1} \alpha^t c_{\delta_u}(t) + \alpha^n u(X_n) \;\middle|\; X_0 = i\right] \\ &= E_{\delta_u}\left[\sum_{t=0}^{n-1} \alpha^t c_{\delta_u}(t) \mid X_0 = i\right] + \alpha^n E_{\delta_u}\left(u(X_n) \middle| X_0 = i\right) \; \forall n \in I\!N \; \forall i \in I \\ \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} u(i) &\geq E_{\delta_u}\left[\sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t c_{\delta_u}(t) \mid X_0 = i\right] + \lim_{n\to\infty} \alpha^n E_{\delta_u}\left(u(X_n) \middle| X_0 = i\right) \quad \forall\, i \in I \\ \Rightarrow u(i) &\geq V_{\delta_u,\alpha}(i) \geq V_\alpha(i) \quad \forall\, i \in I \end{aligned}$$

wegen Lemma 3(1) im Fall $u \in \mathcal{U}(I)$; im Fall $u \geq 0$ ist dies offensichtlich erfüllt.
Beweis von (b): mit $p_{X_n,j} = P(X_{n+1}^- = j | X_n)$ gilt

$$E_\delta(\alpha^{n+1} u(X_{n+1}) \mid X_n, X_0 = i) = \alpha^{n+1} \sum_{j=X_n}^{N} p_{X_n,j} \sum_{a=0}^{j} q_j^\delta(a) u(j-a)$$

$$= \alpha^n \left[E_\delta\left(c_\delta(n) \middle| X_n, X_0 = i\right) + \alpha \sum_{j=X_n}^{N} p_{X_n,j} \sum_{a=0}^{j} q_j^\delta(a) u(j-a) - E_\delta\left(c_\delta(n) \middle| X_n, X_0 = i\right)\right]$$

$$= \alpha^n \left[r(X_n) + \sum_{j=X_n}^{N} p_{X_n,j} \sum_{a=0}^{j} q_j^\delta(a)\,(d(j,a) + \alpha u(j-a)) - E_\delta\left(c_\delta(n) \middle| X_n, X_0 = i \right) \right]$$

$$\geq \alpha^n [T_\alpha u(X_n) - E_\delta(c_\delta(n) \mid X_n, X_0 = i)] \geq \alpha^n [u(X_n) - E(c_\delta(n) \mid X_n, X_0 = i)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha^n E_\delta(c_\delta(n) \mid X_n, X_0 = i) \geq -E_\delta(\alpha^{n+1} u(X_{n+1}) - \alpha^n u(X_n) \mid X_n, X_0 = i)$$

$$\overset{E_\delta(\ldots)}{\Longrightarrow} \quad \alpha^t E_\delta(c_\delta(t) | X_0 = i) \geq -E_\delta(\alpha^{t+1} u(X_{t+1}) - \alpha^t u(X_t) \mid X_0 = i) \quad \forall\, t \in I\!N$$

$$\overset{\sum_{t=0}^{n-1}}{\Longrightarrow} \quad E_\delta \left[\sum_{t=0}^{n-1} \alpha^t c_\delta(t) \;\middle|\; X_0 = i \right] \geq u(i) - \alpha^n E_\delta u(X_n | X_0 = i) \quad \forall\, n \in I\!N$$

$$\overset{n \to \infty}{\Longrightarrow} \quad V_{\delta,\alpha}(i) \geq u(i) \quad \forall\, i \in I \quad \forall\, \delta \in \Pi_1 \text{ wegen Lemma 3(1).} \quad \blacksquare$$

Somit ist in der Klasse $\mathcal{U}(I)$ V_α der einzige Fixpunkt des Operators T_α. Außerhalb dieser Klasse kann es noch weitere Fixpunkte geben. Diese Eindeutigkeitsaussage ergibt den folgenden Eindeutigkeitssatz, dessen Beweis unter Verwendung von beschränkten Kostenfunktionen aber zuerst aufgeführt wird.

Satz 4 *Wenn die Bedingung B gilt, ist V_α die einzige Funktion in $\mathcal{F}(I)$, die der Optimalitätsgleichung genügt.*

In der ersten Beweisführung seien wie angekündigt die Kostenfunktionen beschränkt:

$$T_\alpha V_\alpha(i) = r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \min_{a \in \{0,\ldots,j\}} \{d(j,a) + \alpha V_\alpha(j-a)\}.$$

Wie schon erwähnt, entspricht die Optimalitätsgleichung der Identität $T_\alpha V_\alpha = V_\alpha$. Deswegen ist V_α ein Fixpunkt des Operators T_α. Da nach dem Lemma 5 der Operator T_α auf dem Banachraum $\mathcal{B}(I)$ kontrahierend ist, ist V_α der einzige Fixpunkt von T_α und somit in diesem Fall die einzige Lösung der Optimalitätsgleichung.
Wenn nun die Kostenfunktionen nicht beschränkt sind, aber zu der Bedingung A noch die Bedingung B gilt, ergeben (wie schon erwähnt) beide Teile des Lemmas 6, daß V_α der einzige Fixpunkt des Operators T_α in der Menge $\mathcal{U}(I)$ ist und somit nach dem zweiten Teil des Lemmas 2 die einzige Funktion von erwarteten diskontierten Kosten, die der Optimalitätsgleichung genügt. $\blacksquare$

Unter der Bedingung B kann nach dem folgenden Satz eine optimale Strategie mit der folgenden Politik-Iteration berechnet werden:

Gegeben sei eine stationäre Strategie δ^0. Man wähle induktiv δ^n, so daß gilt:

$$d(j, \delta^n(j)) + \alpha V_{\delta^{n-1},\alpha}(j - \delta^n(j)) = \min_{a \in \{0,\ldots,j\}} \{d(j,a) + \alpha V_{\delta^{n-1},\alpha}(j-a)\}.$$

Satz 5 *Unter der Bedingung B gilt $\lim_{n\to\infty} V_{\delta_n,\alpha}(i) = V_\alpha(i)\ \forall i \in I$, die Folge $(\delta_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert somit gegen die $\alpha-$optimale Strategie.*

$$\begin{aligned}\text{Beweis: } V_{\delta_n,\alpha}(i) &= r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \min_{a\in\{0,\ldots,j\}} \Big\{ d(j,a) + \alpha V_{\delta_{n-1},\alpha}(j-a) \Big\} \\ &\leq r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} d(j, \delta_{n-1}(j)) + \alpha V_{\delta_{n-1},\alpha}(j - \delta_{n-1}(j)) \\ &= V_{\delta_{n-1},\alpha}(i).\end{aligned}$$

Wegen der Monotonie existiert die Funktion $v := \lim_{n\to\infty} V_{\delta_n,\alpha} : I \to I\!R$, denn $\lim_{n\to\infty} V_{\delta_n,\alpha}(i) \geq -|r(i)| - \tilde{B}_i^\alpha > -\infty \ \forall i \in I$. Nach Lemma 3(2) ist $v \in \mathcal{U}(I)$. Außerdem folgt aus der obigen Rechnung die Identität $V_{\delta_n,\alpha} = T_\alpha V_{\delta_{n-1},\alpha}$, und somit liefert der Grenzübergang $n \to \infty$ schließlich $v = T_\alpha v$, so daß $\lim_{n\to\infty} V_{\delta_n,\alpha} = v = V_\alpha$ folgt. ■

Die optimale Strategie δ_α kann wegen des Existenzsatzes unter der Bedingung B auch folgendermaßen ermittelt werden:

$$\begin{aligned}\text{Es gilt} \qquad V_\alpha(i) &= r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \min_{\{0\leq a\leq j\}} \{d(j,a) + \alpha V_\alpha(j-a)\} \quad \text{und} \\ V_\alpha(i) = V_{\delta_\alpha,\alpha}(i) &= r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \left(d(j, \delta_\alpha(j)) + \alpha V_\alpha(j - \delta_\alpha(j)) \right).\end{aligned}$$

$\delta_\alpha(j)$ ist also so aus der Menge $\{0, ..., j\}$ zu wählen, daß $\min_{\{a\in\{0,\ldots,j\}\}} \{d(j,a) + \alpha V_\alpha(j-a)\} = d(j, \delta_\alpha(j)) + \alpha V_\alpha(j - \delta_\alpha(j))$ gilt. Um δ_α in dieser Weise bestimmen zu können, muß somit lediglich die Funktion V_α bekannt sein. Diese läßt sich durch das folgende Lemma bestimmen. Es sei $T_\alpha^{(1)}(u) := T_\alpha(u)$, $T_\alpha^{(n)}(u) := T_\alpha(T_\alpha^{(n-1)}(u)) \ \forall u \in \mathcal{F}(I) \ \forall n \in I\!N$.

Lemma 7 *Unter der Bedingung B gilt* $\lim_{n\to\infty}(T_\alpha^{(n)}(0))(i) = V_\alpha(i)$.

Beweis: Durch vollständige Induktion erhält man $T_\alpha^{(n)}(0) = V_{\delta_\alpha,\alpha}^{(n)}$:

$$\begin{aligned} n=1: \quad \left(T_\alpha^{(1)}(0)\right)(i) &= r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \min_{a\in\{0,\ldots,j\}} \{d(j,0) + \alpha\cdot 0\} = V_{\delta_\alpha,\alpha}^{(1)}(i) \\ n\to n+1: \quad \left(T_\alpha^{(n)}(0)\right)(i) &= r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \min_{a\in\{0,\ldots,j\}} \Big\{ d(j,a) + \alpha (T_\alpha^{(n-1)}(0))(j-a) \Big\} \\ &= r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \min_{a\in\{0,\ldots,j\}} \Big\{ d(j,a) + \alpha V_{\delta_\alpha,\alpha}^{(n-1)}(j-a) \Big\} \\ &= V_{\delta_\alpha,\alpha}^{(n)}(i).\end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsschluß gelungen. Nach Lemma 4 gilt

$$\begin{aligned} V_\alpha(i) &= \lim_{n\to\infty} V_{\delta_\alpha,\alpha}^{(n)}(i) + \lim_{n\to\infty} \alpha^n E_{\delta_\alpha} \left(V_\alpha(X_n) | \, X_0 = i \right) = \lim_{n\to\infty} V_{\delta_\alpha,\alpha}^{(n)}(i) \quad \text{nach Lemma 2.2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(T_\alpha^n(0)\right)(i) \quad \forall i \in I. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Definition 1 *Die Funktion $W_{\delta,\alpha} : I \to \mathbb{R}$ gebe in Abhängigkeit vom Zustand beim Systemanfang die optimale Kostenfunktion an, wenn das System mit einer Reparatur beginnt, die Strategie δ benutzt wird und der Diskontierungsfaktor α ist. Von Interesse ist lediglich die optimale Kostenfunktion W_α.*

Nach dem gleichen Prinzip wie Satz 2 läßt sich der folgende Satz beweisen, so daß der Beweis nicht explizit angegeben wird:

Satz 6

$$W_\alpha(i) = \min_{a\in\{0,\dots,i\}} \left\{ d(i,a) + \alpha \left(r(i-a) + \sum_{j=i-a}^{N} p_{i-a,j} W_\alpha(j) \right) \right\}.$$

Korollar 1 *Zwischen den Funktionen V_α und W_α bestehen die folgenden Beziehungen:*

$$\begin{aligned} W_\alpha(i) &= \min_{a\in\{0,\dots,i\}} \{ d(i,a) + \alpha V_\alpha(i-a) \}, \\ V_\alpha(i) &= r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} W_\alpha(j). \end{aligned}$$

Eine Möglichkeit, W_α numerisch ohne Definition eines neuen Operators zu bestimmen, ist die, zuerst V_α numerisch zu bestimmen und dann mit der ersten Gleichung W_α auszurechnen. Im umgekehrten Fall kann man aber auch zuerst W_α mit dem in der folgenden Definition aufgeführten Operator $\tilde{T}_\alpha$ bestimmen und mit dem Korollar 3 V_α ausrechnen.

Definition 2 *Der Operator $\tilde{T}_\alpha : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ sei wie folgt definiert:*

$$\tilde{T}_\alpha u(i) = \min_{a\in\{0,\dots,i\}} \left\{ d(i,a) + \alpha \left(r(i-a)) + \sum_{j=i-a}^{N} p_{i-a,j} u(j) \right) \right\}.$$

Es sei $\tilde{T}_\alpha^{(1)}(u) := \tilde{T}_\alpha(u)$, $\tilde{T}_\alpha^{(n)}(u) := \tilde{T}(\tilde{T}_\alpha^{(n-1)}(u))\ \forall u \in \mathcal{F}(I)\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Satz 7 *Unter der Bedingung B gelten $\lim_{n\to\infty} W_{\delta_n,\alpha} = W_\alpha$ und $\lim_{n\to\infty} \tilde{T}_\alpha^{(n)}(0) = W_\alpha$.*

Die bang-bang Strategien

Nun werden zu den Beschränktheitsvoraussetzungen, die am Anfang dieses Kapitels festgelegt wurden, weitere praxisnahe Monotonievoraussetzungen geschaffen, um zunächst eine optimale Strategie innerhalb eines einfachen Unterraumes des Strategienraumes angeben zu können.

(1) $r(i)$ ist monoton nicht-fallend in i, $i \in I$.
(2) $\sum_{j=k}^{N} p_{ij}$ ist monoton nicht-fallend in i, $i \in I\ \forall k \in I$.
(3) $d(i,j)$ ist monoton nicht-fallend, sowohl in i, $i \in I$ als auch in j, $j \in I$.

Die Kostenfunktionen sind offensichtlich nach unten beschränkt. Daß weder die Betriebskosten noch die Reparaturkosten mit zunehmendem Alter der Maschine geringer werden, ist wohl eine einsehbare Forderung. Genauso ist eine größere Reparatur nicht kostengünstiger als eine kleinere. Die zweite Bedingung bedeutet, daß die Wahrscheinlichkeit $P(X_{n+1}^{-} \geq k|X_n = i)$ in i monoton nicht-fällt. Dies ist ebenfalls einzusehen, da sich der Zustand der Maschine durch ihren Betrieb nicht verbessern kann: je näher ihr Zustand dem Grenzzustand k ist, umso wahrscheinlicher wird dessen Übertretung. Dieser Fall ist in der Praxis wohl auch zu erwarten.
Die Voraussetzungen (1) und (3) vereinfachen außerdem die Bedingungen A und B dieses Modells zu

Bed. A: $\forall i \in I\ \exists B_i \in I\!R,\ \kappa_i \in I\!N: \quad \sum_{j=i}^{N} p_{ij}^{(n)} \left(r(j) + p_{jk} d(k,k)\right) < B_i n^{k_i}\ \forall n \in I\!N.$

Bed. B: $\lim_{n\to\infty} \alpha^n \sum_{j=i}^{N} p_{ij}^{(n)} \left(r(j) + \tilde{B}_j^{\alpha}\right) = 0.$

In der Praxis ist es häufig der Fall, daß man nur zwischen zwei Aktionen wählen kann: entweder läßt man das System nach der Überprüfung nahezu unverändert laufen oder man ersetzt es bzw. repariert es vollständig. Im Falle eines Ausfalls wird es nur so weit repariert, daß es weiterläuft, allerdings ohne den Systemzustand zu verbessern. Man entscheidet sich demnach zwischen minimaler und maximaler Reparatur. Dieser Sachverhalt wird festgehalten in der

Definition 3 *Die Unterklasse von stationären Strategien δ, für die $\delta(i) \in \{0, i\}$ $\forall i \in I$ gilt, wird die Klasse der bang-bang Strategien Π_1^b genannt. Außerdem sei $V_\alpha^b = \inf_{\{\delta\in\Pi_1^b\}} V_{\delta,\alpha}$.*

$\delta(i) = i$ bedeutet also, daß sich die Strategie δ im Zustand i für maximale Reparatur entscheidet, und $\delta(i) = 0$ steht für minimale Reparatur der Strategie δ im Zustand i. Zur Verdeutlichung des Begriffes 'minimale Reparatur' betrachte man das folgende Beispiel: Ein Systemausfall kann dadurch entstanden sein, daß eine Strom-Sicherung nicht mehr funktioniert. Dann wird sie einfach ausgewechselt ohne daß eine Verbesserung des gesamten Systems stattgefunden hat. Natürlich kann sie auch als Vorsichtsmaßnahme nach jeder Inspektion ausgetauscht werden. Genauso kann man nach jeder Auto-Inspektion die Zündkerzen auswechseln, ohne daß sich der Zustand des Autos verbessert. Diese Aktionen zählen zum Begriff der (physikalischen) 'minimalen Reparatur', der erstmals von Barlow und Hunter [3] eingeführt wurde.

Nach dem Austauschen der Ausdrücke $\min_{\{0,\ldots,k\}}$ durch $\min_{\{0,k\}}$ und V_α durch V_α^b in der Optimalitätsgleichung erhält man

Lemma 8

$$V_\alpha^b(i) = r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \min\left\{d(j,0) + \alpha V_\alpha^b(j),\, d(j,j) + \alpha V_\alpha^b(0)\right\}.$$

Analog zum Satz über die Existenz einer optimalen Strategie in der Klasse Π_1 (Satz 3) gilt auch der

Satz 8 *über die Existenz einer optimalen Strategie in der Klasse Π_1^b:*
Die Voraussetzung B sei erfüllt.

1. *Es sei δ_α^b eine stationäre und deterministische Strategie, derart daß*

$$d(j, \delta_\alpha^b(j)) + \alpha V_\alpha(j - \delta_\alpha^b(j)) = \min_{a\in\{0,j\}} \{d(j,a) + \alpha V_\alpha(j-a)\} \quad \forall j \in I.$$

   Dann ist δ_α^b optimal in der Klasse Π_1^b in bezug auf die $\alpha-$diskontierten Kosten, somit gilt dann die Identität $V_{\delta_\alpha^b,\alpha} = V_\alpha^b$.

2. *Es sei $\delta_{\epsilon,\alpha}^b$ eine stationäre und deterministische Strategie, die die folgende Ungleichung erfüllt:*

$$d(i, \delta_{\epsilon,\alpha}^b(i) + \alpha V_\alpha(i - \delta_{\epsilon,\alpha}^b(i)) \le \min_{a\in\{0,i\}} \{d(i,a) + \alpha V_\alpha(i-a)\} + (1-\alpha)\epsilon \quad \forall i \in I.$$

   Dann gilt $V_{\delta_{\epsilon,\alpha},\alpha} \le V_\alpha^b + \epsilon$, also $\lim_{\epsilon\downarrow 0} V_{\delta_{\epsilon,\alpha}^b,\alpha} = V_\alpha^b \;\forall \alpha \in (0,1)$.

   $\delta_{\epsilon,\alpha}^b$ wird $\epsilon-$optimale Strategie in der Klasse Π_1^b in bezug auf die $\alpha-$diskontierten Kosten genannt.

Ähnlich zu Derman [8], Lemma 1 auf Seite 123 oder Ross [20] auf Seite 37 gilt auch hier das

Lemma 9 *Voraussetzung (2) ist zu der Bedingung äquivalent, daß die Summe $\sum_{j=0}^N p_{ij} f(j)$ monoton nicht-fallend in i, $i \in I$ ist für alle monoton nicht-fallenden Funktionen $f: I \to I\!R$.*

In der oben angegebenen Literatur ist dieses Lemma zwar nur für nicht-negative Funktionen f gezeigt, was aber wegen der Monotonie von f keine Schwierigkeit darstellt: Man definiert die nicht-negative Funktion $\tilde f := f + f_0$, $f_0 := |f(0)|$, dann ist $\tilde f$ monoton nicht-fallend und damit auch $f = \tilde f - f_0$.

Lemma 10 *Voraussetzung (2) ist zu der Bedingung äquivalent, daß die Summe $\sum_{j=k}^N p_{ij}^{(n)}$ monoton nicht-fallend in i, $i \in I$ ist für alle $k \in I$ und $n \in I\!N$.*

Beweis: Es wird durch vollständige Induktion nach n gezeigt, daß unter Voraussetzung (2) die Summe $\sum_{j=k}^{N} p_{ij}^{(n)}$ monoton nicht-fallend ist in i, $i \in I$ für alle $k \in I$. Beim Induktionsanfang ($n = 1$) gibt es nichts zu zeigen, und der Induktionsschluß ergibt sich wie folgt:

$$\sum_{j=k}^{N} p_{ij}^{(n)} = \sum_{j=k}^{N} \sum_{l=0}^{N} p_{il} p_{lj}^{(n-1)} = \sum_{l=0}^{N} p_{il} \sum_{j=k}^{N} p_{lj}^{(n-1)}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist nun die Funktion f mit $f(l) := \sum_{j=k}^{N} p_{lj}^{(n-1)}$ monoton nicht-fallend in l und daher nach dem Lemma 9 ebenfalls die Summe $\sum_{j=k}^{N} p_{ij}^{(n)} = \sum_{l=0}^{N} p_{il} f(l)$ in i. ∎

Somit nimmt die Wahrscheinlichkeit in $i \in I$ nicht nur für jedes feste $k \in I$, sondern auch für jedes feste $n \in I\!N$ zu oder bleibt gleich, bei Start im Zustand i nach n Schritten den Schwellenwert k überschritten zu haben.

Satz 9 *$V_\alpha(i)$ und $V_\alpha^b(i)$ sind für alle $\alpha \in (0,1)$ monoton nicht-fallend in i, $i \in I$.*

Beweis: $\psi(i, \alpha, M)$ seien die minimalen $\alpha-$diskontierten Kosten bis zum Zeitpunkt M ($M \in Z\!\!Z^+$) bei Startwert $i \in I$, also

$$\psi(i, \alpha, M) = \inf_{\{\delta \in \Pi_1^b\}} V_{\delta,\alpha}^{(M)}(i) = \inf_{\{\delta \in \Pi_1^b\}} E_\delta \left(\sum_{n=0}^{M-1} \alpha^n c_\delta(n) \middle| X_0 = i \right).$$

Die Funktion $V_{\delta,\alpha}^{(M)}$ ist für $M \in I\!N$ in Lemma 4 definiert worden. Außerdem gilt offensichtlich $V_{\delta,\alpha}^{(0)} \equiv 0$. Nun wird durch vollständige Induktion nach $M \in Z\!\!Z^+$ gezeigt, daß die Funktion $\psi(i, \alpha, M)$ monoton nicht-fallend in $i \in I$ für alle $\alpha \in (0,1)$ ist. Wegen $\psi(i, \alpha, 0) \equiv 0$ ist der Fall $M = 0$ trivial.

$M \to M + 1$: Aus der Identität

$$V_{\delta,\alpha}^{(M+1)}(i) = r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \left(d(j, \delta(j)) + \alpha V_{\delta,\alpha}^{(M)}(j - \delta(j)) \right) \quad \forall \delta \in \Pi_1 \quad \forall \alpha \in [0,1)$$

folgt genauso wie bei dem Beweis der Optimalitätsgleichung (Satz 2) die folgende Identität:

$$\psi(i, \alpha, M+1) = r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \min_{a \in \{0,\dots,j\}} \{d(j,a) + \alpha \psi(j - a, \alpha, M)\}.$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}
& \min_{a \in \{0,\dots,j\}} \{d(j,a) + \alpha\psi(j-a,\alpha,M)\} \\
= \; & \min\{d(j,0) + \alpha\psi(j,\alpha,M), \dots, d(j,j) + \alpha\psi(0,\alpha,M)\} \\
\overset{I.V.}{\leq} \; & \min\{d(j+1,0) + \alpha\psi(j+1,\alpha,M), \dots, d(j+1,j) + \alpha\psi(1,\alpha,M), \\
& \qquad d(j+1,j+1) + \alpha\psi(0,\alpha,M)\} \\
= \; & \min_{a \in \{0,\dots,j+1\}} \{d(j+1,a) + \alpha\psi(j+1-a,\alpha,M)\}.
\end{aligned}$$

Die Ungleichung gilt, weil im Direktvergleich kein Element in der Klammer kleiner geworden ist und das letzte Element in der unteren Klammer (also das $(j+2)-$te) ebenfalls nicht kleiner ist als das letzte Element in der oberen Klammer (also das $(j+1)-$te). Der Induktionsschluß ist somit wegen der Monotonie der Funktion r und Lemma 9 gelungen. Denn das letztere ist anwendbar mit $f(j) = \min_{a\in\{0,\ldots,j\}}\{d(j,a) + \alpha\psi(j-a,\alpha,M)\}$.
Nun konvergiert $\psi(i,\alpha,M)$ mit $M \to \infty$ offensichtlich gegen V_α. Damit ist gezeigt, daß $V_\alpha(i,\alpha)$ monoton nicht-fallend in i, $i \in I$ ist für alle $\alpha \in (0,1)$. Der Beweis für V_α^b ist nach dem Austauschen des Ausdrucks $\min_{a\in\{0,\ldots,k\}}$ gegen den Ausdruck $\min_{a\in\{0,k\}}$ identisch.

Korollar 2

$$\sum_{j=0}^{N} p_{ij}V_\alpha(j) \textit{ und } \sum_{j=0}^{N} p_{ij}V_\alpha^b(j) \textit{ sind monoton nicht-fallend in } i,\ i \in I.$$

Es gilt der folgende

Satz 10 (1) *In der Unterklasse der bang-bang Strategien gibt es, wenn neben der Bedingung A auch die Bedingung B gilt, eine optimale Strategie δ_α^* der folgenden Gestalt:*
$$\delta_\alpha^*(j) = \begin{cases} 0 & \alpha(V_\alpha^b(i) - V_\alpha^b(0)) \le d(i,i) - d(i,0), \\ j & \alpha(V_\alpha^b(i) - V_\alpha^b(0)) > d(i,i) - d(i,0). \end{cases}$$
Wenn $d(i,i) - d(i,0)$ nicht-wachsend in i, $i \in I$ ist, dann sind die Strategien der folgenden Gestalt optimal in der Unterklasse der bang-bang Strategien:
$$\delta_{k,\alpha}^*(j) = \begin{cases} 0 & j < k, \\ j & j \ge k, \end{cases} \quad k \in \{j_\alpha^*, j_\alpha^*+1, \ldots, i_\alpha^*\}$$

mit $i_\alpha^* = \min A_\alpha,\ A_\alpha := \{j \in I:\ \alpha(V_\alpha^b(j) - V_\alpha^b(0)) > d(j,j) - d(j,0)\}$
und $j_\alpha^* = \min \tilde{A}_\alpha,\ \tilde{A}_\alpha := \{j \in I:\ \alpha(V_\alpha^b(j) - V_\alpha^b(0)) \ge d(j,j) - d(j,0)\}$
($i_\alpha^* := \infty$ *wenn* $A_\alpha = \emptyset$ *und* $j_\alpha^* := \infty$ *wenn* $\tilde{A}_\alpha = \emptyset$).
Solche Strategien heißen bang-bang Strategien mit Schwellenwert k.
In den beiden folgenden Teilen dieses Satzes sei ebenfalls die Funktion $d(i,i) - d(i,0)$ monoton nicht-wachsend in i.

(2) *Wenn eine bang-bang Strategie mit Schwellenwert $k \notin \{j_\alpha^*, j_\alpha^*+1, \ldots, i_\alpha^*\}$ ebenfalls optimal ist, dann gilt $p_{ij} = 0\ \forall (i,j) \in I \times M_k$ mit $M_k := \{k+1, \ldots, j_\alpha^*\} \cup \{i_\alpha^*+1, \ldots, k\}$.*

Weil $i_\alpha^* + 1 > j_\alpha^*$ gilt, ist für jedes $k \in I$ eine dieser beiden Mengen leer.

(3) *Wenn eine bang-bang Strategie δ optimal ist mit $\delta(k) = 0$ für $k > i_\alpha^*$ oder $\delta(k) = k$ für $k < j_\alpha^*$, dann muß $p_{ik} = 0$ für alle $i \in I$ gelten.*

Beweis: Nach Satz 8 ist δ_α^* genau dann in der Unterklasse der bang-bang Strategien optimal, wenn $d(i,\delta_\alpha^*(i)) + \alpha V_\alpha^b(i-\delta_\alpha^*(i)) = \min\left\{d(i,0)+\alpha V_\alpha^b(i),\, d(i,i)+\alpha V_\alpha^b(0)\right\}\ \forall i \in I$. Deshalb ist im Zustand i ersetzen [nicht ersetzen] genau dann optimal, wenn gilt:

$$\begin{array}{ll} d(i,i)+\alpha V_\alpha^b(0) \le d(i,0)+\alpha V_\alpha^b(i) & \left[d(i,i)+\alpha V_\alpha^b(0) \ge d(i,0)+\alpha V_\alpha^b(i)\right] \\ \Leftrightarrow \alpha(V_\alpha^b(i)-V_\alpha^b(0)) \ge d(i,i)-d(i,0) & \left[\alpha(V_\alpha^b(i)-V_\alpha^b(0)) \le d(i,i)-d(i,0)\right]. \end{array}$$

Weil $V_\alpha^b(i)$ nicht-fallend und $d(i,i)-d(i,0)$ nicht-wachsend ist, ist der erste Teil des Satzes offensichtlich. Nun betrachten wir den zweiten Teil:

$$V^b_{\delta^*_{k,\alpha},\alpha}(i) = r(i) + \sum_{j<k} p_{ij}\left(d(j,0)+\alpha V^b_{\delta^*_{k,\alpha},\alpha}(j)\right) + \sum_{j\ge k} p_{ij}\left(d(j,j)+\alpha V^b_{\delta^*_{k,\alpha},\alpha}(0)\right).$$

Somit ist $0 = \left|V_\alpha^b(i) - V^b_{\delta^*_{k,\alpha},\alpha}(i)\right| = \left|\sum_{j\in M_k} p_{ij}\left(d(j,j)+\alpha V^b_{\delta^*_{k,\alpha},\alpha}(0) - d(j,0) - \alpha V^b_{\delta^*_{k,\alpha},\alpha}(j)\right)\right|$ $\forall i \in I$. Die anderen Summanden verschwinden. Wenn $k < j_\alpha^*$ ist, dann gilt $d(j,j)-d(j,0)+\alpha\left(V^b_{\delta^*_{k,\alpha},\alpha}(0) - V^b_{\delta^*_{k,\alpha}}(j)\right) < 0\,\forall j \in M_k = \{k+1,...,j_\alpha^*\}$, und aus $k > i_\alpha$

folgt $d(j,j)-d(j,0)+\alpha\left(V^b_{\delta^*_{k,\alpha}}(0) - V^b_{\delta^*_{k,\alpha}}(j)\right) > 0\,\forall j \in M_k = \{i_\alpha^*+1,...,k\}$.

Daraus folgt $p_{ij} = 0\ \forall (i,j) \in I \times M_k$.
Als letztes wird der dritte Teil bewiesen: Wenn das dort angegebene δ optimal ist, dann gilt für $i \in I$:

$$0 = V_{\delta,\alpha}(i) - V_{\delta_{i_\alpha^*},\alpha}(i) = \sum_{j\in I} p_{ij}\left(d(j,\delta(j)) + \alpha V_\alpha(j-\delta(j)) - d(j,\delta_{i_\alpha^*}(j)) - \alpha V_\alpha(j-\delta_{i_\alpha^*}(j))\right).$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Nun ist } d(j,\delta(j)) + \alpha V_\alpha(j-\delta(j)) & \ge & d(j,\delta_{i_\alpha^*})(j) + \alpha V_\alpha(j-\delta_{i_\alpha^*})(j) \\ \text{und } d(k,\delta(k)) + \alpha V_\alpha(k-\delta(k)) & > & d(k,\delta_{i_\alpha^*})(k) + \alpha V_\alpha(k-\delta_{i_\alpha^*})(k), \end{array}$$

so daß sich $p_{ik} = 0$ ergibt. ∎

Es sei δ die bang-bang Strategie mit Schwellenwert i_α, δ_{i_α}. Dann hat δ folgende Eigenschaften:
(a) $\delta(\delta(i)) = \delta(i)\ \forall i \in I$
(b) $i_\alpha = 1 \Rightarrow X_n = 0\ \forall n \in I\!N$ f.s.
(c) $i_\alpha = \infty \Rightarrow X_{n+1} \ge X_n\ \forall n \in I\!N$ f.s.
(d) Die Kostenfunktion $V_{\delta,\alpha}$ kann in der folgenden Weise aus dieser bekannten Identität berechnet werden:

$$\begin{aligned} V_{\delta,\alpha}(i) &= r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij}(d(j,\delta(j)) + \alpha V_{\delta,\alpha}(j-\delta(j))) \\ &= r(i) + \sum_{j=i}^{i_\alpha-1} p_{ij}(d(j,0)+\alpha V_{\delta,\alpha}(j)) + \sum_{j=i_\alpha}^{N} p_{ij}(d(j,j)+\alpha V_{\delta,\alpha}(0)). \end{aligned}$$

Zuerst können bei vorhandener Lösbarkeitsbedingung die Werte $V_{\delta,\alpha}(0), V_{\delta,\alpha}(1), ..., V_{\delta,\alpha}(i_\alpha - 1)$ aus dem folgenden Gleichungssystem ermittelt werden:

$$V_{\delta,\alpha}(i) = r(i) + \sum_{j=i}^{i_\alpha - 1} p_{ij}(d(j,0) + \alpha V_{\delta,\alpha}(j)) + \alpha V_{\delta,\alpha}(0) \sum_{j=i_\alpha}^{N} p_{ij} + \sum_{j=i_\alpha}^{N} p_{ij} d(j,j) \quad i < i_\alpha.$$

Die Werte $V_{\delta,\alpha}(i)$ für $i \geq i_\alpha$ ergeben sich nun aus der folgenden Identität:

$$V_{\delta,\alpha}(i) = r(i) + \sum_{j=i_\alpha}^{N} p_{ij} d(j,j) + \alpha V_{\delta,\alpha}(0) \quad i \geq i_\alpha.$$

Die Berechnung von $V_{\delta,\alpha}$ aus diesem LGS wird im folgenden Satz näher präzisiert:

Satz 11 *Sei δ eine bang-bang Strategie mit Schwellenwert i^*_α. Man betrachte die $i^*_\alpha-$quadratische Matrix $A = (a_{ij})_{0 \leq i,j < i^*_\alpha}$ und den Vektor $b = (b_0, ..., b_{i^*_\alpha - 1}) \in I\!R^{i^*_\alpha}$ mit*

$$a_{00} := 1 - \alpha \sum_{j=i^*_\alpha}^{N} p_{0j} - \alpha p_{00}, \quad a_{0j} := -\alpha p_{0j}, \quad a_{i0} := -\alpha \sum_{j=i^*_\alpha}^{N} p_{ij} \quad \forall i,j \in \{1, ..., i^*_\alpha - 1\},$$

$$a_{i1} := ... := a_{i,i-1} = 0, \quad a_{ii} := (1 - \alpha p_{ii}), \quad a_{ij} := -\alpha p_{ij} \quad \textit{für} \quad i^*_\alpha > j > i > 0$$

$$\textit{und } b_i := r(i) + \left(\sum_{j=i}^{i^*_\alpha - 1} p_{ij} d(j,0) + \sum_{j=i^*_\alpha}^{N} p_{ij} d(j,j) \right) \quad \forall i \in \{0, ..., i^*_\alpha - 1\}.$$

Wenn die Matrix A, die abgesehen von der ersten Spalte eine obere Dreiecksmatrix ist, regulär ist, dann kann die Kostenfunktion $V_{\delta,\alpha}$ folgendermaßen bestimmt werden:

$$(V_{\delta,\alpha}(0), ..., V_{\delta,\alpha}(i^*_\alpha - 1))^t \; = \; A^{-1} \cdot b.$$

$$V_{\delta,\alpha}(i) = r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} d(j,j) + \alpha V_{\delta,\alpha}(0) \quad \forall i \geq i^*_\alpha.$$

Beweis: Der zweite Teil des Satzes ergibt sich direkt aus dem Vorspann zu diesem Satz. Ebenfalls aus dem Vorspann ergeben sich die folgenden Identitäten:

$$V_{\delta,\alpha}(i) = r(i) + \sum_{j=i}^{i^*_\alpha - 1} p_{ij}(d(j,0) + \alpha V_{\delta,\alpha}(j)) + \alpha V_{\delta,\alpha}(0) \sum_{j=i^*_\alpha}^{N} p_{ij} + \sum_{j=i^*_\alpha}^{N} p_{ij} d(j,j) \; \forall i < i^*_\alpha.$$

Nun wähle i=0:

$$V_{\delta,\alpha}(0) \left(1 - \alpha \sum_{j=i^*_\alpha}^{N} p_{0j} - \alpha p_{00} \right) - \alpha \sum_{j=1}^{i^*_\alpha - 1} p_{0j} V_{\delta,\alpha}(j) = r(0) + \sum_{j=0}^{i^*_\alpha - 1} p_{0j} d(j,0) + \sum_{j=i^*_\alpha}^{N} p_{0j} d(j,j).$$

Für $i^*_\alpha > i > 0$ gilt :

$$V_{\delta,\alpha}(0) \left(-\alpha \sum_{j=i^*_\alpha}^{N} p_{ij} \right) + (1 - \alpha p_{ii}) \, V_{\delta,\alpha}(i) - \sum_{j=i+1}^{i^*_\alpha - 1} \alpha p_{ij} V_{\delta,\alpha}(j) = r(i) + \sum_{j=i}^{i^*_\alpha - 1} p_{ij} d(j,0) + \sum_{j=i^*_\alpha}^{N} p_{ij} d(j,j).$$

Diese Gleichungen erfüllen das LGS $A \cdot (V_{\delta,\alpha}(0), ..., V_{\delta,\alpha}(i_\alpha^* - 1)^t = b$. ■

Wenn nun eine bang-bang Strategie mit unbekanntem Schwellenwert i_α optimal ist und $N < \infty$ gilt, kann man diese Methode zum Berechnen der optimalen Strategie verwenden:
Für jeden Schwellenwert $i_\alpha \in \{1, ..., N\}$ löst man das entsprechende lineare Gleichungssystem und der existierende Wert i_α^*, der $V_{\delta_{i_\alpha^*},\alpha}(i)$ in jedem $i \in \{0, ..., N\}$ minimiert, ist der Schwellenwert der optimalen bang-bang Strategie.

Als nächstes wird eine Abschätzung für den optimalen Schwellenwert i_α gegeben:

Satz 12 *Wenn $d(i,i) - d(i,0)$ monoton nicht-wachsend in i, $i \in I$ ist und für ein $i \in I$ die folgende Bedingung gilt:*

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(r(i) - r(0) + \sum_{j=0}^{N} p_{ij} d(j, j-i) - \sum_{j=0}^{N} p_{0j} d(j,0)\right) \leq d(i,i) - d(i,0),$$

dann gilt für das i_α^* aus dem letzten Satz: $i_\alpha^* > i$.

Für den **Beweis** werden zunächst zwei Ungleichungsketten angegeben: Bei der ersten Ungleichung wird eine Strategie betrachtet, die ausgehend vom Zustand $i \in I$ bei Reparatur immer genau die Abnutzung des vorherigen Zeitintervalls kompensiert, d.h. so repariert, daß sich das System danach wieder im Zustand i befindet. Hier stoppt das System im Zustand i:

$$\begin{aligned} V_\alpha(i) &\leq r(i) + \sum_{j=0}^{N} p_{ij}(d(j, j-i) + \alpha V_\alpha(i)) \\ &= r(i) + \left(\sum_{j=0}^{N} p_{ij} d(j, j-i)\right) + \alpha V_\alpha(i)). \end{aligned}$$

Somit ist $$V_\alpha(i) \leq \frac{1}{1-\alpha}\left(r(i) + \sum_{j=0}^{N} p_{ij} d(j, j-i)\right).$$

Die zweite Ungleichung ergibt sich aus den Monotonieeigenschaften von d und V_α:

$$\begin{aligned} V_\alpha(0) &\geq r(0) + \sum_{j=0}^{N} p_{0j}\left(d(j,0) + \alpha V_\alpha(0)\right) \\ &= r(0) + \left(\sum_{j=0}^{N} p_{0j} d(j,0)\right) + \alpha V_\alpha(0). \end{aligned}$$

Dies ergibt $$V_\alpha(0) \geq \frac{1}{1-\alpha}\left(r(0) + \sum_{j=0}^{N} p_{0j} d(j,0)\right).$$

Daraus folgt

$$V_\alpha(i) - V_\alpha(0) \leq \frac{1}{1-\alpha}\left(r(i) + \sum_{j=0}^{N} p_{ij} d(j, j-i)\right) - \frac{1}{1-\alpha}\left(r(0) + \sum_{j=0}^{N} p_{ij} d(j,0)\right),$$

$$\begin{aligned}\text{also } \alpha(V_\alpha(i) - V_\alpha(0)) &\leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(r(i) - r(0) + \sum_{j=0}^{N} p_{ij} d(j, j-i) - \sum_{j=0}^{N} p_{0j} d(j,j)\right) \\ &\leq d(i,i) - d(i,0).\end{aligned}$$

Es ist deshalb $i \notin A_\alpha$, also $\{0, 1, ..., i\} \cap A_\alpha = \emptyset$, und damit ist $i_\alpha^* > i$. ■

Aus diesem Beweis ergibt sich unmittelbar das

Korollar 3 *Für $V_\alpha(0)$ gilt die folgende Abschätzung:*

$$\frac{1}{1-\alpha}\left(r(0) + \sum_{j=0}^{N} p_{0j} d(j,0)\right) \leq V_\alpha(0) \leq \frac{1}{1-\alpha}\left(r(0) + \sum_{j=0}^{N} p_{0j} d(j,j)\right).$$

Dieses Korollar liefert schon einmal vorweg das Ergebnis, daß die Funktion $\alpha \to (1-\alpha)V_\alpha(0)$ auf $[0,1)$ nach unten durch den Wert $r(0) + \sum_{j=0}^{N} p_{0j} d(j,0)$ und nach oben durch den Wert $r(0) + \sum_{j=0}^{N} p_{0j} d(j,j)$ beschränkt ist. Diese Funktion wird im nächsten Abschnitt bei der Behandlung der Durchschnittskosten benötigt.

Auf die bereits in der Einleitung erwähnten Ähnlichkeiten zwischen dem hier behandelten Modell und dem Modell von Douer und Yechiali [9] soll nun näher eingegangen werden: Douer und Yechiali benutzen die gleichen Übergangswahrscheinlichkeiten, und die Kosten ihres Modells stehen in der folgenden Beziehung zu den Kostenfunktionen dieses Modells:

$$r_i := r(i), \quad c_{ik} := d(i, i-k) \quad \forall i \in \{0, ..., N\}, \ \forall k \in \{0, ..., i\}, \ N < \infty.$$

In ihrem Satz 2.1 beweisen sie, daß unter den folgenden Bedingungen eine verallgemeinerte Kontrollgrenzen-Strategie die diskontierten Kosten minimiert:

a) die Folge $(r_i)_{i \in I}$ ist monoton nicht-fallend;
b) für festes $k \in I$ ist die Folge $(c_{ik})_{i=k}^{N}$ monoton nicht-fallend und $c_{ii} = 0 \ \forall i \in I$;
c) Dermans Bedingung an die Übergangswahrscheinlichkeiten ist erfüllt;
d) ein System im Zustand N muß repariert werden;
e) für festes $k \in I$ ist die Folge $(c_{ik} - r_i)_{i=k}^{N}$ monoton nicht-fallend.

Es sei noch einmal erklärt, daß eine verallgemeinerte Kontrollgrenzen-Strategie eine Strategie ist, die ein System mit einem Zustand unterhalb eines festen Schwellenwertes k nicht repariert. Ein System, das in einem Zustand größergleich k ist, wird entweder vollständig oder teilweise repariert. Die genaue Reparaturaktion wird nicht festgelegt. Nun ist es offensichtlich, daß die hier gemachten Voraussetzungen (1), ..., (3) die Bedingungen a), b) und c) von Douer und Yechiali implizieren. Somit ergibt sich für das hier behandelte System der folgende Satz. Auf die Definition der Durchschnittskosten wird erst im nächsten Abschnitt eingegangen:

Satz 13 *Wenn $N < \infty$ ist, die Reparatur-Aktion $a = 0$ im Zustand N nicht erlaubt ist, $d(i,0) = 0$ ist für alle $i \in I$ und die Funktion $d(i,i-k) - r(i)$ in $i \in \{k,...,N\}$ für alle $k \in I$ monoton nicht-fallend ist, dann minimiert eine verallgemeinerte Kontrollgrenzenstrategie sowohl die diskontierten Kosten als auch die Durchschnittskosten.*

Als nächstes werden weitere Voraussetzungen an die Größen des Systems gestellt, unter denen, wie sich zeigt, die optimale Strategie eine bang-bang Strategie ist. Darin enthalten ist als erste die schon im letzten Satz benötigte Bedingung.

(4) $d(i,i) - d(i,0)$ ist monoton nicht-wachsend in i, $i \in I$.
(5) $r(i)$ ist konkav in i, $i \in I$.
(6) $\sum_{j=k}^{N}(p_{i+1,j} - p_{ij})$ ist monoton nicht-wachsend in i, $i \in \{0,...,N-1\}$ $\forall k \in I$.
(7) $d(i,a)$ ist konkav in $a \in \{0,...,i\}$ für alle i in I.

Im Vergleich zu den ersten drei Forderungen, die in der Praxis eigentlich immer erfüllt sind, werden hier nun wirkliche Forderungen an das System gestellt. Dies trifft in besonderem Maße auf die Bedingung (4) zu, die besagt, daß der Unterschied zwischen maximaler und minimaler Reparatur mit zunehmendem Alter der Maschine nicht größer wird. Die Bedingung (6) besagt, daß die Wahrscheinlichkeit, nach einer Betriebsperiode von Zustand i in einen Zustand aus der Menge $\{k, k+1, ..., N\}$ zu gelangen, in i immer langsamer wächst oder gleich bleibt. Letzteres soll nach der letzten Bedingung auch für die Kosten einer Reparatur in Abhängigkeit von der Größe der Reparatur gelten.
Daß die Forderung nach der Konkavität der Kostenfunktionen sinnvoll ist, wird am ehesten bei der in der Einleitung angesprochenen Identifizierung mit einem $N-$Komponenten-System deutlich. Es seien C_0 feste Inspektionskosten, C_1 Fixkosten bei der Reparatur bzw. Ersetzung von Einheiten (z.B. Anfahrtskosten) und C_2 die realen Ersetzungskosten einer Einheit. Schon die simple Kostenfunktion $d(i,a) = C_0 + C_1 \cdot 1_{\{a>0\}} + a \cdot C_2$ ist in der zweiten Komponenten konkav. Da auf Grund von Mengenrabatten das Ersetzen vieler Komponenten eher billiger pro Komponente wird, wird die Funktion in der Praxis eher noch konkaver. Bei den Betriebskosten gilt eine ähnliche Argumentation, da erst einmal Fixkosten zu Grunde liegen und das Produzieren mit $n \cdot m$ Maschinen ebenfalls u.a. wegen Mengenrabatten bei den Rohstoffen und Einsparung beim Personal weniger als $n-$mal so teuer ist wie das Produzieren mit m Maschinen für natürliche Zahlen n und m.

Es gilt hier das

Lemma 11 *Voraussetzung (6) ist äquivalent zu der Aussage, daß die Summe $\sum_{j=i}^{N}(p_{i+1,j} - p_{ij})f(j)$ monoton nicht-wachsend ist in i, $i \in \{0,...,N-1\}$ für alle monoton nicht-fallende Funktionen $f: I \to I\!R$.*

Wie die Aussage hat auch der **Beweis** Ähnlichkeit mit Lemma 9:

'$\Leftarrow$' Mit der in Lemma 9 konstruierten Familie von monoton nicht-fallenden

Funktionen $\{f_k,\ k \in I\}$ ist $\displaystyle\sum_{j=0}^{N}(p_{i+1,j}-p_{ij})f_k(j) = \sum_{j=k}^{N}(p_{i+1,j}-p_{ij})$

für alle $k \in I$ monoton nicht-wachsend in $i \in \{0,...,N-1\}$.
'$\Rightarrow$' Wie in Lemma 9 gilt $\tilde{f}(j) = \sum_{k=0}^{N} c_k f_k(j)$ mit $\tilde{f} = f + f_0$, $f_0 = |f(0)|$ und somit $c_k \geq 0\, \forall k \in I$. Daraus folgt für alle $i \in \{0,...,N-1\}$ die Gleichungskette

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{N}(p_{i+1,j}-p_{ij})f(j) &= \sum_{j=0}^{N}(p_{i+1,j}-p_{ij})(\tilde{f}(j)-f_0) = \sum_{j=0}^{N} p_{i+1,j}\tilde{f}(j) - \sum_{j=0}^{N} p_{ij}\tilde{f}(j) \\
&= \sum_{k=0}^{N} c_k \sum_{j=k}^{N} p_{i+1,j} - \sum_{k=0}^{N} c_k \sum_{j=k}^{N} p_{ij} \\
&= \sum_{k=0}^{N} c_k \sum_{j=k}^{N}(p_{i+1,j}-p_{ij}).
\end{aligned}$$

Somit ist $\sum_{j=0}^{N}(p_{i+1,j}-p_{ij})f(j)$ monoton nicht-wachsend in i.

Satz 14 *Unter den Voraussetzungen (1),...,(7) sind $V_\alpha(i)$ und $V_\alpha^b(i)$ für alle $\alpha \in (0,1)$ konkav in i, $i \in I$.*

Beweis: Es ist zu zeigen, daß $V_\alpha(i+1) - V_\alpha(i)$ monoton nicht-wachsend ist in i, $i \in \mathbb{N}$ für alle $\alpha \in (0,1)$:

$$V_\alpha(i+1) - V_\alpha(i) = r(i+1) - r(i) + \alpha \sum_{j=0}^{N}(p_{i+1,j}-p_{ij}) \min_{a \in \{0,...,j\}} \{d(j,a) + V_\alpha(j-a)\}.$$

Nun trifft diese Aussage auf $r(i+1) - r(i)$ zu. Daß das Minimum in j monoton nicht-fallend ist, wird genauso wie die Monotonie von $\min_{a\in\{0,...,j\}}\{d(j,a) + \alpha\Psi(j-a,\alpha,N)\}$ in j im Satz 9 gezeigt. Die gesamte Summe hat nun die gewünschte Monotonieeigenschaft nach dem letzten Lemma. Der Beweis für V_α^b ist analog. ■

Aus der Analysis ist bekannt, daß aus V_α konkav auch $V_\alpha \circ g$ konkav folgt, wenn g linear ist. Auch die Konkavität der Kostenfunktion d in der zweiten Komponente bedeutet, daß die Funktion $d(i,a) + \alpha V_\alpha(i-a)$ bei festem i in Abhängigkeit von a auf $\{0,...,i\}$ nur in den Randwerten 0 oder i ihr Minimum annehmen kann. Der Existenzsatz (Satz 3) sagt somit aus, daß sich unter der zusätzlichen Bedingung B bei der Suche nach der optimalen Strategie auf die Unterklasse der bang-bang Strategien beschränkt werden kann. Die gesuchte optimale Strategie ist demnach die in Satz 10 angegebene Strategie δ_α^*. Dieses Ergebnis und ein weiterer Gedanke bezüglich der Voraussetzung (4) werden in dem abschließendem Satz festgehalten:

Satz 15 *Es seien die Bedingungen A und B,* (1), (2), (3), (5), (6) *und* (7) *erfüllt.*
(1) *Die optimale Strategie sieht im allgemeinen folgendermaßen aus:*
$\delta^*_\alpha(j) = \begin{cases} 0 & \alpha(V_\alpha(i) - V_\alpha(0)) \leq d(i,i) - d(i,0), \\ j & \alpha(V_\alpha(i) - V_\alpha(0)) > d(i,i) - d(i,0). \end{cases}$
Es sei zusätzlich eine der folgenden Bedingungen (4) *oder* (4a) *erfüllt:*
(4) $d(i,i) - d(i,0)$ *ist monoton nicht-wachsend in* i, $i \in I$;
(4a) *Es existiert eine reelle Konstante* ρ *und eine natürliche Zahl* i_0 *mit der Eigenschaft* $d(i,i) - d(i,0) = \rho \cdot \alpha \cdot (i-1) + d(1,1) - d(1,0)\ \forall i \geq 1$ *(Linearität von* $d(i,i) - d(i,0)$ *in* $\mathbb{N}$*) und* $r(i) - r(0) > \rho \cdot (i-1) + \frac{1}{\alpha}(d(1,1) - d(1,0))\ \forall i \geq i_0$.
Dann sind die Strategien der folgenden Gestalt optimal:
$\delta^*_{k,\alpha}(j) = \begin{cases} 0 & j < k, \\ j & j \geq k, \end{cases} \quad k \in \{j^*_\alpha, j^*_\alpha + 1, ..., i^*_\alpha\},$

mit $i^*_\alpha = \min A_\alpha,\ A_\alpha := \{j \in I:\ \alpha(V_\alpha(j) - V_\alpha(0)) > d(j,j) - d(j,0)\}$
und $j^*_\alpha = \min \tilde{A}_\alpha,\ \tilde{A}_\alpha := \{j \in I:\ \alpha(V_\alpha(j) - V_\alpha(0)) \geq d(j,j) - d(j,0)\}$
($i^*_\alpha = \infty$ *wenn* $A_\alpha = \emptyset$ *und* $j^*_\alpha = \infty$ *wenn* $\tilde{A}_\alpha = \emptyset$).
(2) *Wenn unter der zusätzlichen Bedingung* (4) *oder* (4a) *eine bang-bang Strategie mit Schwellenwert* $k \notin \{j^*_\alpha, j^*_\alpha + 1, ..., i^*_\alpha\}$ *ebenfalls optimal ist, dann gilt*

$$p_{ij} = 0\ \forall (i,j) \in I \times M_k \text{ mit } M_k := \{k+1, ..., j^*_\alpha\} \cup \{i^*_\alpha + 1, ..., k\}.$$

Weil $i^*_\alpha + 1 > j^*_\alpha$ *ist, ist für jedes* $k \in I$ *eine dieser beiden Mengen leer.*
(3) *Wenn ebenfalls unter der zusätzlichen Bedingung* (4) *oder* (4a) *eine bang-bang Strategie* δ *optimal ist mit* $\delta(k) = 0$ *für* $k > i^*_\alpha$ *oder* $\delta(k) = k$ *für* $k < j^*_\alpha$, *dann muß* $p_{ik} = 0$ *für alle* $i \in I$ *gelten.*

Bewiesen werden muß nur noch, daß die Bedingung (4) durch die Bedingung (4a) ausgetauscht werden kann:

$$V_\alpha(i) = r(i) + \sum_{j=0}^{N} p_{ij} W_\alpha(j) \text{ und } V_\alpha(0) = r(0) + \sum_{j=0}^{N} p_{0j} W_\alpha(j).$$

$$\text{Somit ist } V_\alpha(i) - V_\alpha(0) = r(i) - r(0) + \sum_{j=0}^{N} (p_{ij} - p_{0j})\, W_\alpha(j).$$

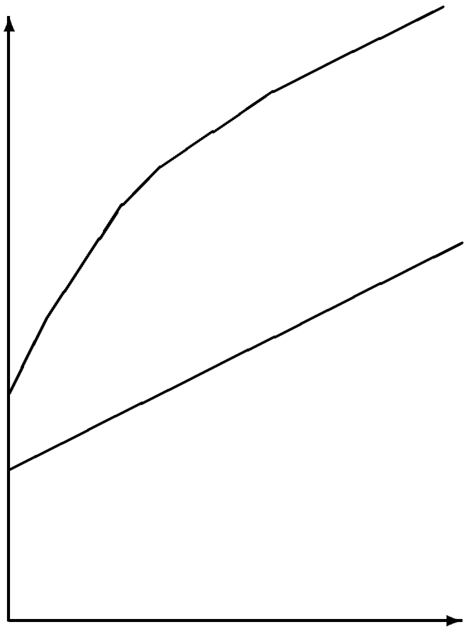
Die Monotonie der Funktion W_α läßt sich genauso zeigen wie die Monotonie der Funktion V_α oder ist auch direkt aus der Monotonie von V_α (Satz 9) und Korollar 1 zu sehen. Somit ist $\sum_{j=0}^{N} p_{ij} W_\alpha(j)$ monoton nicht-fallend in i. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \alpha\,(V_\alpha(i) - V_\alpha(0)) &\geq \alpha(r(i) - r(0)) \\ &> \alpha\rho \cdot (i-1) + (d(1,1) - d(1,0)) = d(i,i) - d(i,0)\ \forall i \geq i_0. \end{aligned}$$

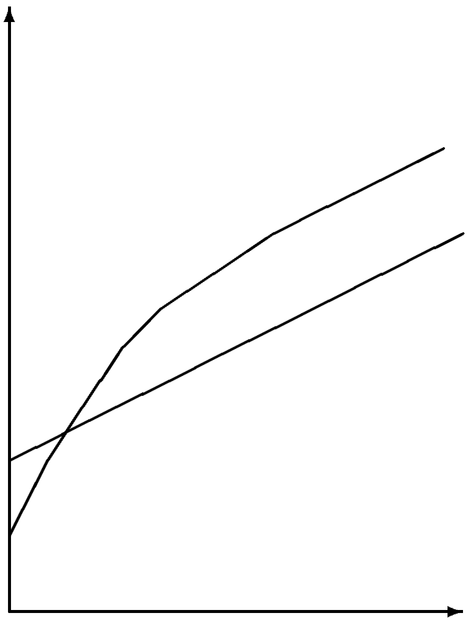
Da die linke Seite konkav in i, monoton wachsend und mindestens ab der natürlichen Zahl i_0 größer als die Gerade auf der rechten Seite ist, ist sie entweder auf ganz $\mathbb{N}$

größer als die Gerade (dann ist der Schwellenwert 1) *(Fall 1)* oder es gibt eine natürliche Zahl i^*_α, so daß die linke Seite in $\{1, ..., i^*_\alpha - 1\}$ kleinergleich und in $\{i^*_\alpha, i^*_\alpha + 1, ...\}$ größer der rechten Seite ist *(Fall 2)*. In diesem Fall ist nach dem Beweis von Satz 10 jeder Wert aus $\{j^*_\alpha, ..., i^*_\alpha\}$ der gesuchte Schwellenwert. Die Beschränkung der Untersuchung auf $I\!N$ reicht, da der Schwellenwert aus $I\!N$ ist.

In der folgenden Skizze sind der Übersicht halber Punkte durch einen Polygonzug dargestellt:



Fall 1



Fall 2

Wenn die Funktion $d(i,i) - d(i,0)$ in $I\!N$ linear ist, braucht sie bei konkaver optimaler Kostenfunktion also nicht monoton nicht-steigend zu sein.

Satz 16 *Auch ohne, daß die Bedingung B erfüllt ist, gilt das Folgende:*
Wenn bekannt ist, daß eine bang-bang Strategie mit Schwellenwert optimal ist und V_{δ_j} für ein $j \in I$ eine Lösung der Optimalitätsgleichung ist, dann ist δ_j optimal.

Beweis: δ_{i^*} sei die unbekannte optimale Strategie. Somit ist $V_{\delta_{i^*}}$ eine Lösung der Optimalitätsgleichung. Für $k \in I$ gilt:

$$\begin{aligned}
V_{\delta_k}(i) &= r(i) + d(i,i) + \alpha V_{\delta_k}(0)\ \forall i > i^* \\
\Rightarrow V_{\delta_{i^*}}(i) - V_{\delta_j}(i) &= \alpha \left(V_{\delta_{i^*}}(0) - V_{\delta_j}(0) \right)\ \forall i > \max\{i^*, j\} \\
\Rightarrow ||V_{\delta_{i^*}} - V_{\delta_j}||_\infty &\leq \alpha |V_{\delta_{i^*}}(0) - V_{\delta_j}(0)| + \max\left\{ |V_{\delta_{i^*}}(\max\{i^*, j\})|, \left| V_{\delta_j}(\max\{i^*, j\}) \right| \right\}
\end{aligned}$$

$< \quad \infty.$

Nun werden die gleichen Schritte wie im Eindeutigkeitsbeweis des Banachschen Fixpunktsatzes vollzogen: Aus $j \neq i^*$ folgt, daß $V_{\delta_{i^*}}$ und V_{δ_j} zwei verschiedene Fixpunkte des Operators T_α in dem Raum $X := \{f : I \to I\!R\}$ sind. Es sei $d(u,v) := ||u - v||_\infty$ eine Funktion: $X^2 \to \overline{I\!R}$, dann gilt $d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$. Es ist

$$T_\alpha V_{\delta_{i^*}} = V_{\delta_{i^*}},\ T_\alpha V_{\delta_j} = V_{\delta_j},\ d(T_\alpha u,\ T_\alpha v) \leq \alpha\ d(u,v),\ \alpha < 1, \text{ somit}$$

$$d\Big(V_{\delta_{i^*}},\ V_{\delta_j}\Big) = d\Big(T_\alpha V_{\delta_{i^*}},\ T_\alpha V_{\delta_j}\Big) \leq \alpha d\Big(V_{\delta_{i^*}}, V_{\delta_j}\Big) \text{ und } d\Big(V_{\delta_{i^*}}, V_{\delta_j}\Big) < \infty.$$

Daher gilt $d\Big(V_{\delta_{i^*}}, V_{\delta_j}\Big) = 0$ also $V_{\delta_j} = V_{\delta_{i^*}} = V_\alpha$, und somit ist δ_j optimal. Auch ohne daß die Bedingung B erfüllt ist, ist somit die Strategie δ_{i^*} optimal, wenn sie durch die Politik-Iteration ermittelt wurde. ■

2.2 Das Durchschnittskostenkriterium

Durchschnittskosten werden in der Praxis vor allem dann herangezogen, wenn der gesamte betrachtete Prozeßablauf unter gleichen Bedingungen (Kosten und stochastisches Verhalten) nur von relativ kurzer Dauer ist. Da – abgesehen von einigen Beweisen - in dieser Arbeit kein endlicher Horizont betrachtet wird, ist dies natürlich nur für sehr kurze Zeitintervalle sinnvoll.

Es gibt Länder, in denen die Währung instabil ist und die Angabe eines Diskontierungsfaktors schwierig ist. Auch ist es möglich, daß dieser Faktor größer als eins anzusetzen ist. In all diesen Fällen ist ebenfalls die Behandlung von Durchschnittskosten vorzuziehen.

In diesem Abschnitt seien zunächst sowohl die Betriebskosten r als auch die Reparaturkosten d durch die Konstante C beschränkt. Folgende Wertfunktion, die die Durchschnittskosten angibt, wird behandelt:

$$\phi_\delta(i) = \limsup_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} E_\delta\left(\sum_{n=0}^{m}\left(r(X_n) + \sum_{j=0}^{N} P(X_{n+1}^- = j|X_n) d(j,\delta(j))\right)\Bigg| X_0 = i\right) \ \forall i \in I.$$

Die erwarteten undiskontierten Kosten über ein endliches Zeitintervall sind wegen der Beschränktheit der Kosten immer endlich, so daß der Erwartungswert definiert ist. Für jede Strategie δ ist $\phi_\delta \leq 2C$ und somit endlich.

Die Zufallsvariable $c_\delta(n)$ gebe erneut die Kosten im $n-$ten Zeitintervall unter der Strategie δ an ($n \in Z\!\!\!Z^+$). Es ist also

$$c_\delta(n) = r(X_n) + \sum_{j=0}^{N} P(X_{n+1}^- = j|X_n) d(j,\delta(j)) \text{ und } \phi_\delta(i) = \limsup_{m\to\infty} \frac{E_\delta\left(\sum_{n=0}^{m} c_\delta(n)\right)}{m+1}.$$

Außerdem sei $\phi(i) := \inf_{\{\delta\in\Pi_1\}} \phi_\delta(i)$.

Einige Existenzsätze der stationären Durchschnittskosten-optimalen Strategie

Begonnen wird dieser Abschnitt mit einem allgemeinen Existenzsatz.

Satz 17
(1) Wenn es eine beschränkte Funktion h auf dem Zustandsraum I und eine Konstante $g \in I\!R$ gibt, so daß gilt:

$$g + h(i) = r(i) + \sum_{j=i}^{N} P(X_{n+1}^{-} = j | X_n = i) \min_{a \in \{0,\dots,j\}} \{d(j,a) + h(j-a)\} \quad \forall i \in I,$$

dann existiert eine stationäre Strategie δ^*, für die gilt: $\quad g = \phi(i) = \phi_{\delta^*}(i) \quad \forall i \in I.$
δ^* erfüllt die folgende Identität:

$$d(j, \delta^*(j)) + h(j - \delta^*(j)) = \min_{a \in \{0,\dots,j\}} \{d(j,a) + h(j-a)\}.$$

(2) Wenn es eine beschränkte Funktion h auf dem Zustandsraum I und eine Konstante $g \in I\!R$ gibt, so daß für ein stationäres $\delta \in \Pi_1$ gilt:

$$g + h(i) = r(i) + \sum_{j=i}^{N} P(X_{n+1}^{-} = j | X_n = i) \left(d(j, \delta(j)) + h(j - \delta(j)) \right) \quad \forall i \in I,$$

dann ist $g = \phi_\delta(i) \ \forall i \in I$.
(3) Wenn es eine beschränkte Funktion h auf dem Zustandsraum I und eine Konstante $g \in I\!R$ gibt, so daß gilt:

$$g + h(i) = r(i) + \sum_{j=i}^{N} P(X_{n+1}^{-} = j | X_n = i) \min_{a \in \{0,j\}} \{d(j,a) + h(j-a)\} \quad \forall i \in I,$$

dann existiert eine stationäre Strategie δ_b^*, für die gilt:
$g = \phi^b(i) := \phi_{\delta_b^*}(i) = \inf_{\{\delta \in \Pi^b\}} \phi_\delta(i) \quad \forall i \in I.$ *δ_b^* erfüllt die folgende Identität:*

$$d(j, \delta_b^*(j)) + h(j - \delta_b^*(j)) = \min_{a \in \{0,j\}} \{d(j,a) + h(j-a)\}.$$

Beweis: δ sei eine beliebige Strategie, $H_n := (X_0, X_1^-, X_1, X_2^-, \dots, X_n)$ sei die Vergangenheit des Prozesses unter der Strategie δ bis zum Zeitpunkt n. Dann gilt

$$\begin{aligned} E_\delta\left(h(X_i) | H_{i-1}\right) &= \sum_{j \in I} P(X_i^- = j | X_{i-1}) h(j - \delta(j)) \\ &= r(X_{i-1}) + \sum_{j \in I} P(X_i^- = j | X_{i-1}) (d(j, \delta(j)) + h(j - \delta(j))) \\ &\quad - \sum_{j \in I} P(X_1^- = j | X_0) d(j, \delta(j)) \; - \; r(X_{i-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{nur Teil (1)}{\geq} && r(X_{i-1}) + \sum_{j\in I} P(X_i^- = j|X_{i-1}) \min_{a\in\{0,\dots,j\}} \{d(j,a) + h(j-a)\} \\
& && - \sum_{j\in I} P(X_i^- = j|X_{i-1}) d(j,\delta(j)) \; - \; r(X_{i-1}) \\
&= && g + h(X_{i-1}) - r(X_{i-1}) - \sum_{j\in I} P(X_i^- = j|X_{i-1}) d(j,\delta(j)).
\end{aligned}$$

Für den Teil (2) folgt die letzte Gleichung direkt ohne Verwendung der Ungleichung, und daher gilt in diesem Falle Gleichheit.

$$\text{Aus } E_\delta\left(\sum_{i=1}^n [h(X_i) - E_\delta(h(X_i)|H_{i-1})]\right) = \sum_{i=1}^n (E_\delta(h(X_i)) - E_\delta(h(X_i))) = 0 \text{ folgt}$$

$$0 \overset{=}{\leq} E_\delta\left(\sum_{i=1}^n \left(h(X_i) - g - h(X_{i-1}) + r(X_{i-1}) + \sum_{j\in I} P(X_i^- = j|X_{i-1}) d(j,\delta(j))\right)\right)$$

$$\overset{=}{\leq} E_\delta(h(X_n)) - E_\delta(h(X_0)) - ng + \sum_{i=1}^n \left(r(X_{i-1}) + \sum_{j\in I} P(X_i^- = j|X_{i-1}) d(j,\delta(j))\right) \qquad (*)$$

$$\Rightarrow g \overset{=}{\leq} \frac{E_\delta(h(X_n))}{n} - \frac{E_\delta(h(X_0))}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(r(X_{i-1}) + \sum_{j\in I} P(X_i^- = j|X_{i-1}) d(j,\delta(j))\right).$$

Nun gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{E_\delta(h(X_n))}{n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{E_\delta(h(X_0))}{n} = 0.$

$$\text{und } \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(r(X_{i-1}) + \sum_{j\in I} P(X_i^- = j|X_{i-1}) d(j,\delta(j))\right) = \phi_\delta(X_0).$$

Daraus folgt $g \overset{=}{\leq} \phi_\delta(X_0)$ und somit die Aussage des ersten Teils.

Wenn man statt δ die optimale Strategie δ^* verwendet, werden auch für den ersten Teil aus sämtlichen Ungleichungen Gleichungen, so daß sich ergibt:

$g \quad = \quad \phi_{\delta^*}(X_0),$ und damit ist auch der zweite Teil gezeigt.

Der dritte Teil wird genauso bewiesen wie der erste Teil, es ist lediglich jeweils der Ausdruck $\min\{0,...,j\}$ durch den Ausdruck $\min\{0,j\}$ zu ersetzen. Damit ist der Satz vollständig bewiesen. ■

Anmerkung: Aus der Beweiszeile $(*)$ folgt die Identität

$$E_{\delta^*}\left(\sum_{i=0}^{n-1} c(i) + h(X_n) \middle| X_0 = i\right) = ng + h(i).$$

Unter Verwendung der Definition 5.2.1 von Hernandez-Lerma, Lasserre [10] ist (g, h, δ^*) somit gerade als *kanonisches Tripel* definiert.

Satz 18
(1) Wenn es ein $M < \infty$ *gibt mit* $|V_\alpha(i) - V_\alpha(0)| < M \quad \forall \alpha \in (0,1) \forall i \in I$, *dann existiert eine stationäre Durchschnittskosten-optimale Strategie, und es gilt* $\phi = \lim_{\alpha\uparrow 1}(1-\alpha)V_\alpha(0)$.
(2) Wenn es ein $M < \infty$ *gibt mit* $|V_\alpha^b(i) - V_\alpha^b(0)| < M \quad \forall \alpha \in (0,1) \forall i \in I$, *dann existiert eine Strategie die Durchschnittskosten-optimal in der Klasse der bang-bang Strategien ist, und es gilt:* $\phi^b = \lim_{\alpha\uparrow 1}(1-\alpha)V_\alpha^b(0)$. .
(3) Wenn es für eine Strategie δ *mit* $\phi_\delta(0) < \infty$ *ein* $M < \infty$ *gibt mit* $|V_{\alpha,\delta}(i) - V_{\alpha,\delta}(0)| < M \quad \forall \alpha \in (0,1) \forall i \in I$, *dann gilt* $\phi_\delta = \lim_{\alpha\uparrow 1}(1-\alpha)V_{\alpha,\delta}(0)$.

Beweis:(1) Zuerst wird die Familie $\{h_\alpha,\ \alpha \in (0,1)\}$ von Funktionen: $I \to I\!R$ definiert: $h_\alpha(i) = V_\alpha(i) - V_\alpha(0)\ \forall i \in I$. Aus dem Cantorschen Diagonalisierungsverfahren folgt, daß es eine Folge $(\alpha_n)_{n\in Z\!\!Z^+}$ in $[0,1]$ und eine reellwertige Funktion h auf I mit $lim_{n\to\infty} h_{\alpha_n}(i) = h(i)\ \forall i \in I$
$\Big(\text{siehe [20] S.95f}: \ h_{\alpha(i,n)}(i) \to h_\alpha(i),\ (\alpha(i,n))_n \subset (\alpha(i-1,n))_{n=0}^\infty,\ \alpha_n := \alpha(n,n)\ \forall n \in Z\!\!Z^+\Big)$.
Nun genügt V_{α_n} der Optimalitätsgleichung:

$V_{\alpha_n}(i) = r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \min_{a\in\{0,\dots,j\}} \{d(j,a) + \alpha_n V_{\alpha_n}(j-a)\}$. Subtraktion von $\alpha_n\, V_{\alpha_n}(0)$

ergibt $(1-\alpha_n)V_{\alpha_n}(0) + h_{\alpha_n}(i) = r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \min_{a\in\{0,\dots,j\}} \{d(j,a) + \alpha_n h_{\alpha_n}(j-a)\}$. $\quad (*)$

Aus der Beschränktheit der Folgen $(h_{\alpha_n})_{n=1}^\infty$ und $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ folgt nach dem Lebesgueschen Konvergenzsatz:

$$r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \min_{a\in\{0,\dots,j\}} \{d(j,a) + \alpha_n h_{\alpha_n}(j-a)\} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \min_{a\in\{0,\dots,j\}} \{d(j,a) + \alpha h(j-a)\}.$$

Der Grenzübergang $n \to \infty$ in der letzten Gleichung $(*)$ liefert mit Hilfe des letzten Satzes (Satz 17) die Behauptung mit $h := \lim_{n\to\infty} h_{\alpha_n}$ und $g := \lim_{n\to\infty}(1-\alpha_n)V_{\alpha_n}(0)$; g ist wohldefiniert, weil nach dem letzten Lemma die Funktion $\alpha \to (1-\alpha)V_\alpha(0)$ für alle $\alpha \in (\rho, 1)$ beschränkt ist für ein $\rho \in (0,1)$: Für jede nach oben gegen eins konvergierende Folge $(\tilde\alpha_n)_{n=1}^\infty$ gibt es eine Teilfolge $(\tilde{\tilde\alpha}_n)_{n=1}^\infty$, so daß $(1-\tilde{\tilde\alpha}_n)V_{\tilde{\tilde\alpha}_n}$ konvergiert. Der letzte Satz ergibt, daß dieser Grenzwert ϕ ist. O.B.d.A. war die Folge $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ so gewählt, daß sie mit der Folge $(\tilde{\tilde\alpha}_n)$ übereinstimmt.
Die Teile (2) und (3) lassen sich durch Austausch der folgenden Ausdrücke beim letzten Beweis zeigen:

Teil (2) : $\{0,\dots,j\}$ durch $\{0,j\}$ und h_α durch $h_\alpha^b : \ h_\alpha^b(i) := V_\alpha^b(i) - V_\alpha^b(0)$;
Teil (3) : $\min_{a\in\{0,\dots,j\}} \{d(j,a) + \alpha_n V_{\alpha_n}(j-a)\}$ durch $d(j,\delta(j)) + \alpha_n V_{\alpha_n}(j-\delta(j))$ und h_α durch $h_{\delta,\alpha} : h_{\delta,\alpha}(i) := V_{\delta,\alpha}(i) - V_{\delta,\alpha}(0)$. Außerdem wird hier der zweite Teil des letzten Lemmas verwendet. ■

Satz 19 *Ist eine der folgenden zwei Bedingungen erfüllt, dann ist die Existenz einer stationären Durchschnittskosten-optimalen Strategie und die Existenz einer stationären Durchschnittskosten-optimalen Strategie innerhalb der Klasse der bang-bang Strategien gesichert:*
(I) Der Zustandsraum ist endlich.
(II) Die Bedingungen $(1), ..., (3)$ *des diskontierten Modells sind erfüllt.*

Beweis: Daß die Aussage unter der Bedingung (I) folgt, besagt Ross, [20], S.25. Sind wiederum die Voraussetzungen $(1), ..., (3)$ erfüllt, ist V_α für alle $\alpha \in (0,1)$ monoton nicht-fallend. Nun sei $\tilde{\delta}_\alpha$ die Strategie, die im ersten Schritt das System neuersetzt und sich ab dem 2. Schritt genau wie die Strategie δ^*_α verhält. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|V_\alpha(i) - V_\alpha(0)| &= V_\alpha(i) - V_\alpha(0) \\
&\leq V_{\tilde{\delta}_\alpha}(i) - V_\alpha(0) \\
&= r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} d(j,j) + \alpha V_\alpha(0) - V_\alpha(0) \\
&\leq r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} d(j,j) \\
&\leq 2C \quad \forall i \in I.
\end{aligned}$$

Das Ersetzen von V_α durch V^b_α ergibt $|V^b_\alpha(i) - V^b_\alpha(0)| \leq 2C \ \forall i \in I$. Nun folgen die Aussagen aus den Teilen (1) und (2) des letzten Satzes 18.

In dem Satz 17 ist die Gestalt der optimalen Strategie angegeben. Somit ergibt sich aus dem Beweis von Satz 18 unter Verwendung der dort definierten Funktionen h und h^b das Folgende:

Korollar 4 *Unter den Voraussetzungen* (I) *oder* (II) *von Satz 19 gilt:*

1. *Die Strategie* δ^* *mit* $d(i,\delta^*(i)) + h(i - \delta^*(i)) = \min_{a\in\{0,...,i\}}\{d(i,a) + h(i-a)\} \ \forall i \in I$ *minimiert die Durchschnittskosten in der Klasse* Π_1.

2. *Die Strategie* δ^*_b *mit* $d(i,\delta^*_b(i)) + h^b(i - \delta^*_b(i)) = \min_{a\in\{0,i\}}\{d(i,a) + h(i-a)\} \ \forall i \in I$ *minimiert die Durchschnittskosten in der Klasse* Π^b_1.

Ein endlicher Zustandsraum $(N < \infty)$

Um als erstes die Durchschnittskosten-optimale Strategie für ein System ohne besondere Voraussetzungen an die Größen explizit zu bestimmen, wird sich auf einen endlichen Zustandsraum $(N < \infty)$ beschränkt. Dieses ist für praktische Anwendungen allerdings keine sonderliche Einschränkung, da es dort i.a. einen schlechtesten Zustand $N \in I\!N$ gibt. Satz 18(1) garantiert die Existenz einer Durchschittskosten-optimalen Strategie. Vor der Berechnung der optimalen Strategie werden erst einmal besondere Eigenschaften, die sich bei einem endlichen Zustandsraum ergeben, vorgestellt. Damit bei den folgenden Ergebnissen (auch beim späteren Nachschlagen) klar ist, daß sie nur für den Fall $I = \{0, ..., N\}$, $N < \infty$ gelten, wird hier für den Zustandsraum die Bezeichnung I_N statt der Bezeichnung I verwendet.

Zuerst wird ein Zusammenhang zwischen der Durchschnittskosten-optimalen Wertfunktion und einer diskontierten optimalen Wertfunktion hergeleitet:

Satz 20 *Unter der Bedingung, daß der Wert $\alpha := \inf_{\{i \in I\}}\{p_{iN}\}$ positiv ist, gelten die folgenden Identitäten:*

$$\begin{aligned}
(1)\ \phi(i) &= \alpha \min_{a \in I_N}\{d(N,a) + \tilde{V}_{1-\alpha}(N-a)\},\\
(2)\ \phi^b(i) &= \alpha \min_{a \in \{0,N\}}\{d(N,a) + \tilde{V}^b_{1-\alpha}(N-a)\} \textit{ und}\\
(3)\ \phi_\delta(i) &= \alpha \left(d(N,\delta(N)) + \tilde{V}_{\delta,1-\alpha}(N-\delta(N)\right) \ \forall \delta \in \Pi_1.
\end{aligned}$$

Hier ist $\tilde{V}_\alpha$ ($\tilde{V}^b_\alpha$) die (in der Klasse der bang-bang Strategien) optimale Wertfunktion des Systems mit den Größen

$$\tilde{r} = r, \quad \tilde{d} = d \cdot (1-\alpha), \quad \tilde{p}_{ij} = \frac{p_{ij} - \alpha 1_{\{j=N\}}}{1-\alpha} \quad \forall i, j \in I_N.$$

Beweis: Die Optimalitätsgleichung lautet

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_{1-\alpha}(i) &= \tilde{r}(i) + \sum_{j=i}^{N} \tilde{p}_{ij} \min_{a \in \{0,\ldots,j\}}\{\tilde{d}(j,a) + (1-\alpha)\tilde{V}_{1-\alpha}(j-a)\}\\
&= r(i) + \sum_{j=i}^{N} \frac{p_{ij}}{1-\alpha} \min_{a \in \{0,\ldots,j\}}\{(1-\alpha)d(j,a) + (1-\alpha)\tilde{V}_{1-\alpha}(j-a)\}\\
&\quad - \frac{\alpha}{1-\alpha} \min_{a \in \{0,\ldots,N\}}\{(1-\alpha)d(N,a) + (1-\alpha)\tilde{V}_{1-\alpha}(N-a)\}.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\tilde{V}_{1-\alpha}(i) + \alpha \min_{\{a \in I_N\}}\left\{d(N,a) + \tilde{V}_{1-\alpha}(N-a)\right\} = r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \min_{a \in \{0,\ldots,j\}}\{d(j,a) + \tilde{V}_{1-\alpha}(j-a)\}.$$

Also ist Satz 17 (1) mit der wegen der Endlichkeit von I_N beschränkten Funktion $h = \tilde{V}_{1-\alpha}$ und $g = \alpha \min_{a \in I_N}\{d(N,a) + \tilde{V}_{1-\alpha}(N-a)\}$ erfüllt und somit der erste Teil gezeigt. Der dritte Teil beweist sich ähnlich beginnend mit der Gleichung

$$\tilde{V}_{\delta,1-\alpha}(i) = \tilde{r}(i) + \sum_{j=i}^{N} \tilde{p}_{ij} \left(\tilde{d}(j,\delta(j)) + (1-\alpha)\tilde{V}_{\delta,1-\alpha}(j-\delta(j))\right).$$

Daraus ergibt sich die Darstellung:

$$\tilde{V}_{\delta,1-\alpha}(i) + \alpha\left(d(N,\delta(N)) + \tilde{V}_{\delta,1-\alpha}(N-\delta(N))\right) = r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij}\left(d(j,\delta(j)) + \tilde{V}_{\delta,1-\alpha}(j-\delta(j))\right).$$

Hier ist Satz 17 (3) mit $h = \tilde{V}_{\delta,1-\alpha}$ und $g = \alpha\left(d(N,\delta(N)) + \tilde{V}_{1-\alpha,\delta}(N-\delta(N)\right)$ erfüllt. Der zweite Teil wird wieder analog zum ersten Teil unter Verwendung der Menge $\{0,j\}$ statt der Menge $\{0,...,j\}$ und Satz 17 (2) bewiesen. Somit ist alles gezeigt. ■

Als nächstes sei für $i \in I_N$ $\tilde{I}_i$ die Menge aller Zustände, in die eine Maschine nach einer Betriebsperiode gelangen kann, wenn sie sich vor der Betriebsperiode im Zustand i befand. Somit ist $\tilde{I}_i = \{k \in \tilde{I} \,|\, p_{ik} \neq 0\}$.

Lemma 12 *Wenn der stochastische Prozeß $X^- = (X_n^-)_{n\in N}$ bei jeder beliebigen Wahl $\delta \in \tilde{\Pi}_N$ genau eine stationäre Verteilung auf $\tilde{I}$ hat, dann sind die $\tilde{I}_i$ paarweise nicht disjunkt, es gilt also $\tilde{I}_i \cap \tilde{I}_j \neq \emptyset\ \forall i,j \in I_N$.*

Der Beweis wird indirekt geführt: Angenommen, es existieren i und j aus I_N mit $\tilde{I}_i \cap \tilde{I}_j = \emptyset$, dann werde folgende stationäre Strategie δ gewählt:

$$\begin{aligned} \delta(k) &= k-i \quad \forall k \in \tilde{I}_i, && (1)\\ \delta(k) &= k-j \quad \forall k \in \tilde{I}_j, && (2)\\ \delta(k) &= 0 \qquad\quad \text{sonst.} && (3) \end{aligned}$$

Die endlichen Mengen $\tilde{I}_i$ und $\tilde{I}_j$ sind abgeschlossene, irreduzible Unterklassen des Prozesses X^- unter der Strategie δ, denn für $k \in \{i,j\}$, $l_1 \in \tilde{I}_k$ gilt:

$$P\left(X_{n+1}^- = l_2 | X_n^- = l_1\right) = p_{kl_2} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad l_2 \in \tilde{I}_k.$$

Somit gibt es stationäre Verteilungen π_i auf $\tilde{I}_i$ und π_j auf $\tilde{I}_j$. Nun ist es möglich, zwei verschiedene Verteilungen $\tilde{\pi}_i$ und
$\tilde{\pi}_j$ auf $\{0,...,N\}$ zu konstruieren:

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_i(k) &= \pi_i(k) \quad \forall k \in \tilde{I}_i \qquad & \tilde{\pi}_i(k) &= 0 \quad \forall k \notin \tilde{I}_i,\\ \tilde{\pi}_j(k) &= \pi_j(k) \quad \forall k \in \tilde{I}_j \qquad & \tilde{\pi}_j(k) &= 0 \quad \forall k \notin \tilde{I}_j. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Eindeutigkeit der stationären Verteilung. Damit ist der Beweis des Lemmas gelungen.

Satz 21 *Zu allen Politiken $\delta \in \Pi_N$ existiert genau dann genau eine stationäre Verteilung des stochastischen Prozesses $\tilde{X}^-$, wenn p_{iN} für alle i aus I_N nicht verschwindet.*

Für die Beweisrichtung '⇒' wird das vorausgegangene Lemma verwendet: Dieses besagt insbesondere, daß $\tilde{I}_i \cap \tilde{I}_N \neq \emptyset$ für alle i aus $\tilde{I}$ gilt. Wegen $p_{Nj} = 1_{\{N=j\}}$ ist nun wiederum $\tilde{I}_N = \{N\}$. Somit gilt $\tilde{I} \supset \{N\}$, also $p_{iN} > 0$ für alle i aus $\tilde{I}$. Damit ist dieser Teil des Satzes bewiesen.
'⇐': Aufgrund der Endlichkeit des Zustandsraumes gibt es keine null-rekurrenten Zustände

von X^-. Für jeden transienten Zustand i und jede stationäre Verteilung $\tilde{\pi} = (\pi_j)_{j \in I_N}$ auf X^- gilt $\tilde{\pi}(i) = 0$. Wegen der Endlichkeit von I_N gibt es nicht nur transiente Zustände, so daß es positiv-rekurrente Zustände geben muß. Als nächstes betrachte man die Wahrscheinlichkeit

$$q_{iN}^- := P(X_{n+1}^- = N | X_n^- = i) = \sum_{k=0}^{i} P(\delta(i) = k) p_{i-k,N} \geq \min_{k \in \{0,\ldots,i\}} \{p_{i-k,N}\} > 0.$$

Somit kommuniziert jeder positiv-rekurrente Zustand j mit N ($P(\exists n \in I\!N : X_n = N | X_0 = j) = 1$). Auch N kommuniziert mit diesem Zustand, denn andernfalls wäre N nicht positiv rekurrent. N interkommuniziert mit jedem positiv-rekurrenten Zustand j (N kommuniziert mit j, und j kommuniziert mit N), daher ist die abgeschlossene Menge von positiv-rekurrenten Zuständen irreduzibel. Deshalb gibt es genau eine stationäre Verteilung auf dieser Klasse positiv-rekurrenter Zustände, und somit gibt es eine auf I_N unter jeder Strategie. ■

Unter der gegebenen Strategie δ seien $\pi_i := \lim_{n \to \infty} P(X_n = i)$ und
$\tilde{\pi}_i := \lim_{n \to \infty} P(X_n^- = i)$. Dann gilt:

$$\tilde{\pi}_j = \sum_{i=0}^{N} \pi_i p_{ij}, \text{ wenn } (\pi_i) \text{ existiert und } \pi_j = \sum_{i=j}^{N} \tilde{\pi}_i P(\delta(i) = i - j), \text{ wenn } (\tilde{\pi}_i) \text{ existiert.}$$

Somit gibt es genau dann genau eine stationäre Verteilung auf X^- unter δ, wenn es genau eine auf X unter δ gibt, so daß der letzte Satz auch mit dem Prozeß X^- an Stelle von X gilt.

Im folgenden wird mit Hilfe der stationären Wahrscheinlichkeit die Durchschnittskosten-optimale Strategie bestimmt. Auf Grund des letzten Satzes muß die folgende Voraussetzung erfüllt sein:

$$p_{iN} > 0 \; \forall i \in \tilde{I}.$$

Diese Voraussetzung besagt, daß eine Maschine von jedem Zustand aus nach einer Betriebsperiode den schlechtesten Zustand erreichen kann: egal, wie gut ihr Zustand vorher war, eine Betriebsperiode kann die Maschine so sehr belasten, daß sie sich hinterher in einem nicht mehr zu verschlechternden Zustand befindet. Daß sich die Maschine durch Bedienungsfehler bzw. Abnutzung in jeglicher Form außer Betrieb setzen kann, ist sicherlich eine Bedingung, die nicht bei jedem Reparatursystem in der Praxis erfüllt ist.

Berechnung der Durchschnittskosten-optimalen Strategie durch ein lineares Programm

Eine Politik β kann als eine Menge von Wahrscheinlichkeiten $\beta = \{\beta_i(a) \,|\, i, a \in \tilde{I}\}$ aufgefaßt werden mit $\beta_i(a) := P(A_n = a \,|\, X_{n+1}^- = i) \forall n \in I\!N$. Offensichtlich ist

$\sum_{a=0}^{N} \beta_i(a) = 1 \ \forall i \in \tilde{I}$. Dieser Sachverhalt bildet die Motivation für den folgenden

Satz 22 *Jede Politik β kann mit einem Vektor $\pi = (\pi_{ia})_{i,a\in\tilde{I}}$ identifiziert werden, der die folgenden Eigenschaften hat:*

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \pi_{ia} \geq 0 \quad \forall i, a \in \tilde{I} \quad \textit{und} \quad \pi_{ia} = 0 \quad \forall a > i \\
(2) & \sum_{i=0}^{N} \sum_{a=0}^{i} \pi_{ia} = 1 \\
(3) & \sum_{a=0}^{j} \pi_{ja} = \sum_{i=0}^{N} \sum_{\tilde{a}=0}^{i} \pi_{i\tilde{a}} p_{i-\tilde{a},j}.
\end{array}
$$

Dabei ist unter π_{ia} die Wahrscheinlichkeit zu verstehen, daß im stationären Fall die Maschine sich im Zustand i befindet und gemäß der Politik β die Aktion a gewählt wird, also

$$\pi_{ia} = \lim_{n\to\infty} P_\beta(X_{n+1}^- = i,\, A_n = a) \quad \forall i, a \in \tilde{I}.$$

Beweis: $(\beta \Rightarrow \pi)$
Daß der im Satz definierte Vektor π die Eigenschaften (1) und (2) hat, ist offensichtlich. In (3) steht auf beiden Seiten die Wahrscheinlichkeit, daß der Prozeß $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ im Zustand j verweilt, wobei auf der rechten Seite bzgl. des Zustandes und der Aktion des vorherigen Zeitintervalls bedingt wird.
$(\pi \to \beta)$: Bei gegebenem Vektor π werde die Politik β wie folgt definiert:

$$\tilde{\beta}_i(a) := \frac{\pi_{ia}}{\sum_{\tilde{a}=0}^{N} \pi_{i\tilde{a}}}.$$

Diese Definition erscheint sinnvoll, da nach dem im Satz angegebenen Vektor π der Wert $\beta_i(a)$ gerade die Wahrscheinlichkeit angibt, bei gegebenem Zustand i im stationären Fall die Aktion a zu wählen. Nun sei

$$\tilde{\pi}_{ia} := \lim_{n\to\infty} P_{\tilde{\beta}}(X_{n+1}^- = i,\, A_n = a) \qquad \forall i, a \in \tilde{I}.$$

Um diese Richtung des Satzes zu zeigen, muß nun nur noch bewiesen werden, daß π mit $\tilde{\pi}$ übereinstimmt: $(\tilde{\pi}_{ia}, i, a \in \tilde{I})$ sind die Grenzwahrscheinlichkeiten der zweidimensionalen Markov-Kette$(X_{n+1}^-,\, A_n)_{n\geq 0}$. Daher sind sie die einzige Lösung von

$$
\begin{array}{lll}
(1') \quad \tilde{\pi}_{ia} & \geq 0 \ \text{ und } \ \tilde{\pi}_{ia} = 0 \quad \forall a > i & \\
(2') \quad \sum_{i=0}^{N} \sum_{a=0}^{N} \tilde{\pi}_{ia} & = & 1 \\
(3')\forall n \in I\!N: \ \tilde{\pi}_{ja} & = & \sum_{i=0}^{N} \sum_{a'=0}^{N} \tilde{\pi}_{ia'} P(X_{n+2}^- = j,\, A_{n+1} = a | X_{n+1}^- = i,\, A_n = a') \\
 & = & \sum_{i=0}^{N} \sum_{a'=0}^{i} \tilde{\pi}_{ia'} p_{i-a',j} \beta_j(a) \\
 & = & \sum_{i=0}^{N} \sum_{a'=0}^{i} \tilde{\pi}_{ia'} p_{i-a',j} \frac{\pi_{ja}}{\sum_{a''=0}^{N} \pi_{j,a''}}.
\end{array}
$$

Diese Gleichungen werden aber auch von den Grenzwahrscheinlichkeiten $(\pi_{ia},\ i,a \in \tilde{I})$ erfüllt, denn (1) und (2) entsprechen (1′) und (2′). Daß die Gleichung (3) der Gleichung (3′) entspricht, wird im folgenden gezeigt:

$$\begin{aligned}
(3') \Leftrightarrow \pi_{ja} &= \sum_{i=0}^{N}\sum_{a'=0}^{i} \pi_{ia'} p_{i-a',j} \frac{\pi_{j,a}}{\sum_{a''=0}^{N} \pi_{j,a''}} \\
\Leftrightarrow \sum_{a=0}^{N} \pi_{ja} &= \sum_{i=0}^{N}\sum_{a'=0}^{i} \pi_{ia'} p_{i-a',j} \frac{\pi_{j,a}}{\sum_{a''=0}^{j} \pi_{j,a''}} \\
\Leftrightarrow \sum_{a=0}^{j} \pi_{ja} &= \sum_{i=0}^{N}\sum_{a'=0}^{i} \pi_{ia'} p_{i-a',j} \Leftrightarrow (3).
\end{aligned}$$

Damit ist die Identität $\pi = \tilde{\pi}$ und somit der Satz gezeigt. ■

Aus dem letzten Satz und der dort angegebenen Definition des Vektors π folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} E_\beta(C_\beta(X_n, a_n)) &= \sum_{i=0}^{N}\sum_{a=0}^{i} \pi_{ia} C_\beta(i,a) \\
&= \sum_{i=0}^{N}\sum_{a=0}^{i} \pi_{ia}(d(i,a) + r(i-a)).
\end{aligned}$$

Da dieser Grenzwert existiert, gilt

$$\begin{aligned}
\phi_\beta(i_0) &= \lim_{n\to\infty} E_\beta \left(\left. \frac{\sum_{i=1}^{n} C_\beta(X_n, a_n)}{n} \right| X_0 = i_0 \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} E_\beta(C_\beta(X_n, a_n)) \\
&= \sum_{i=0}^{N}\sum_{a=0}^{i} \pi_{ia}(d(i,a) + r(i-a)).
\end{aligned}$$

Somit läßt sich das Problem, eine Strategie zu finden, welche die Durchschnittskosten minimiert, als folgendes lineares Programm formulieren:

$$\begin{aligned}
\text{minimiere} \quad & \sum_{i=0}^{N}\sum_{a=0}^{i} \pi_{ia}(d(i,a) + r(i-a)) \\
\text{mit} \quad & \pi_{ia} \geq 0 \quad \forall i,a \in \tilde{I} \\
& \pi_{ia} = 0 \quad \forall i,a \in \tilde{I}:\ a > i \\
& \sum_{i=0}^{N}\sum_{a=0}^{i} \pi_{ia} = 1 \\
& \sum_{a=0}^{j} \pi_{ja} = \sum_{i=0}^{N}\sum_{a=0}^{i} \pi_{ia} p_{i-a,j} \qquad \forall j \in \tilde{I}.
\end{aligned}$$

Der Simplex-Algorithmus löst dieses Problem. Liefert er π^* als Lösung, so sieht die optimale Strategie δ^* wie folgt aus:

$$\delta_i^*(a) = \frac{\pi_{ia}^*}{\sum_{a'=0}^{i} \pi_{ia'}^*}.$$

Wenn π^* ein Extrempunkt der zulässigen Lösung ist, verschwinden für jedes i die Werte π^*_{ia} für alle a bis auf eines.
Eine Möglichkeit, die Durchschnittskosten-optimale Strategie unter Voraussetzungen, die auch schon im diskontierten Fall Verwendung fanden, nicht nur bei endlichem Zustandsraum auszurechnen, wird im folgenden Abschnitt angegeben:

Der allgemeine Zustandsraum ($N < \infty$ oder $N = \infty$)

Nun wird sich als erstes näher mit der Durchschnittskosten-optimalen Wertfunktion beschäftigt, wenn der Zustandsraum abzählbar ist. Zunächst werden die folgenden Zufallsvariablen auf $\mathbb{Z}^+$ eingeführt:

Definition 4

$$\tau^\delta(j) := \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N} | X_n = j\} & wenn\,\{...\} \neq \emptyset, \\ \infty & sonst; \end{cases}$$

$$\tau^\delta_m(j) := \begin{cases} \min\{n > \tau^\delta_{m-1} | X_n = j\} & wenn\,\{...\} \neq \emptyset, \\ \infty & sonst, \end{cases}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. τ^δ_0 sei Null, so daß sich $\tau^\delta_1 = \tau_\delta$ ergibt.

$$\tau^\delta_\geq(j) := \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N} | X_n \geq j\} & wenn\,\{...\} \neq \emptyset, \\ \infty & sonst. \end{cases}$$

Wie üblich ist auch hier unter $\tau^\delta(j) \wedge n$ das Minimum von $\tau^\delta(j)$ und n $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ zu verstehen. Zuletzt wird noch das Folgende definiert:

$$K^\delta_i := \left\{ j \in I \,\middle|\, E(\tau^\delta(j) | X_0 = i) < \infty \right\} \quad \forall i \in I.$$

K^δ_i ist also die Menge der Zustände, die zu einem zufälligen Zeitpunkt erreicht wird, so daß diese Zeitspanne einen endlichen Erwartungswert besitzt.

Lemma 13 *Aus $\cap_{i\in I} K^\delta_i \neq \emptyset$ folgt für $j \in \cap_{i\in I} K^\delta_i$ und $i \in I$:*

$$\phi_\delta(i) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} E\left(\sum_{k=0}^{N} c_\delta(k) \middle| X_0 = i \right) = \frac{E\left(\sum_{n=0}^{\tau^\delta(j)-1} c_\delta(n) \middle| X_0 = j \right)}{E(\tau^\delta(j) | X_0 = j)},$$

so daß ϕ konstant ist.

Beweis: $\cap_{i\in I} \tilde{K}^\delta_i \neq \emptyset \Rightarrow \exists j \in I : j \in \tilde{K}^\delta_i \ \forall i \in I$. Es sei j fest. Der Zustand i kommuniziert mit dem Zustand j, und j ist positiv rekurrent ($j \in K^\delta_j$). Wegen $\tau^\delta_{i+1}(j) > \tau^\delta_i(j)$, existiert ein $M(N) \in \mathbb{Z}^+$ mit $\tau^\delta_{M(N)}(j) \leq N < \tau^\delta_{M(N)+1}(j)$ $\forall N \in \mathbb{N}$.

$$E\left(\sum_{n=0}^{N} c_\delta(n) \middle| X_0 = i \right) = E\left(\sum_{n=0}^{\tau^\delta_1(j)-1} c_\delta(n) \middle| X_0 = i \right) + E\left(\sum_{n=\tau^\delta_1(j)}^{\tau^\delta_2(j)-1} c_\delta(n) \middle| X_0 = i \right) + ...$$

$$+E\left(\sum_{n=\tau^\delta_{M(N)-1}(j)}^{\tau^\delta_{M(N)}(j)-1} c_\delta(n)\middle|\, X_0=i\right)+E\left(\sum_{n=\tau^\delta_{M(N)}(j)}^{N} c_\delta(n)\middle|\, X_0=i\right)$$

$$=(E_\delta(M(N))-1)^+E\left(\sum_{n=\tau^\delta_1(j)}^{\tau^\delta_2(j)-1} c_\delta(n)\middle|\, X_0=i\right)+d$$

$$\text{mit } 0\le d\le 2c\cdot\Big(E(\tau^\delta(j)|X_0=i)+E(\tau^\delta(j)|X_0=j)\Big)$$

$$\text{weil } 0\le E\left(\sum_{n=0}^{\tau^\delta_1(j)-1} c_\delta(n)\middle|\, X_0=i\right)\le 2cE(\tau^\delta(j)|X_0=i) \text{ und}$$

$$E\left(\sum_{n=\tau^\delta_{M(N)}(j)}^{N} c_\delta(n)\middle|\, X_0=i\right)\le E\left(\sum_{n=\tau^\delta_{M(N)}(j)}^{\tau^\delta_{M(N)+1}(j)-1} c_\delta(n)\middle|\, X_0=i\right)\le 2cE(\tau^\delta(j)|X_0=j).$$

Folglich ist $E\left(\sum_{n=0}^{N} c_\delta(n)\middle|\, X_0=i\right) = (E_\delta(M(N))-1)^+E\left(\sum_{n=0}^{\tau^\delta(j)-1} c_\delta(n)\middle|\, X_0=j\right)+d.$

Es ist $\tau^\delta_{i+1}(j)-\tau^\delta_i(j)\overset{D}{=}\tau^\delta_i(j)-\tau^\delta_{i-1}(j)$ für alle $i\in I\!N$. Aus einem Erneuerungsargument folgt

$$E_\delta(M(N))E(\tau^\delta_1(j)|X_0=j)=E(\tau^\delta_{M(N)}(j)|X_0=j)\le\ N$$

$$\le E(\tau^\delta_{M(N)+1}(j)|X_0=j)=(E_\delta(M(N))+1)\,E(\tau^\delta_1(j)|X_0=j).$$

Somit gilt $\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{E_\delta(M(N))}{N+1}=\dfrac{1}{E(\tau^\delta(j)|X_0=j)}$ und deshalb

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}E\left(\sum_{k=0}^{N} c_\delta(k)\middle|\, X_0=i\right)=\frac{E\left(\sum_{n=0}^{\tau^\delta(j)-1} c_\delta(n)\middle|\, X_0=j\right)}{E(\tau^\delta(j)|X_0=j)}.$$

Korollar 5 *Es sei δ eine bang-bang Strategie mit Schwellenwert i^* und $\max_{\{0\le i<i^*\}}\{p_{ii}\}<1$. Dann ist ϕ_δ konstant.*

Beweis: Weil $E\left(\min\{n\in I\!N|X_n^->X_0\}\,|X_0=k\right)=\frac{1}{1-p_{kk}}<\infty$ für alle $k\in I$ gilt, überschreitet der Prozeß $(X_n^-)_{n\in N}$ den Wert i^* in erwarteter Zeit kleinergleich $\sum_{k=i}^{i^*-1}\frac{1}{1-p_{kk}}$, startend im Zustand $X_0=i$. Dies ergibt $E(\min\{n\in I\!N: X_n^-\ge i^*\}|X_0=i)<\infty$, so daß $0\in K_i^\delta\ \forall i\in I$ folgt. Somit ist die Bedingung des letzten Lemmas erfüllt, und alles ist gezeigt. ■

Man könnte geneigt sein zu glauben, daß die Funktion ϕ_δ grundsätzlich konstant ist. Daß dieses nicht stimmt, zeigt das folgende Beispiel:

Es seien $p_{i\,i+1}:=1\ \forall i\in\{0,...,N-1\}$ und $\delta(i):=1\ \forall i\in I$. Dann gelten die Identitäten

$$\phi_\delta(i)=r(i)+d(i+1,1)\ \forall i\in\{0,...,N-1\} \text{ und } \phi_\delta(N)=r(N-1)+d(N,1).$$

Somit ist ϕ i.a. von i abhängig. Hier ist wegen $K_i^\delta = \{i\}\,\forall i \in I$ das letzte Lemma nicht erfüllt.

Jetzt können die Hauptsätze dieses Abschnittes über die Gestalt der Durchschnittskosten-optimalen Strategien unter ähnlichen Bedingungen wie im diskontierten Modell bewiesen werden:

Satz 23 *Unter den Bedingungen* $(1),\ldots,(3)$ *gibt es eine wachsende Folge* $(\alpha_n)_{n\in N}$, *so daß* $i^* := \lim_{n\to\infty} i^*_{\alpha_n}$ *und* $\lim_{n\to\infty}\left(V^b_{\alpha_n}(j) - V^b_{\alpha_n}(0)\right)$ *existieren. Außerdem ist* $i^* \leq \tilde{i}^* := \min\{j \in I : \lim_{n\to\infty}\left(V^b_{\alpha_n}(j) - V^b_{\alpha_n}(0)\right) > d(j,j) - d(j,0)\}$ $(\min\emptyset := \infty)$. *In der Unterklasse der bang-bang Strategien minimieren diejenigen mit Schwellenwert* $\{i^*, i^*+1, \ldots, \tilde{i}^*\}$ *die Durchschnittskosten. Dies gilt auch für* $i^* = \infty$, *wenn die folgende Bedingung für jedes* $i \in I$ *erfüllt ist:* $p_{ii} \neq 1$, *und es gibt eine endliche Menge* A_i, *so daß* $p_{ij} = 0\;\forall j \notin A_i$ *gilt.*

Beweis: Wegen der Kostenbeschränktheit sind die Bedingungen A und B des diskontierten Modells erfüllt. Daher gilt nach Satz 15: Wenn die Bedingungen $(1),\ldots,(3)$ erfüllt sind, minimiert in der Unterklasse der bang-bang Strategien diejenige mit Schwellenwert $i^*_\alpha := \min\{j \in I : \alpha(V^b_\alpha(j) - V^b_\alpha(0)) > d(j,j) - d(j,0)\}$ die $\alpha-$diskontierten Kosten. Unter Verwendung des Cauchyschen Diagonalisierungs-Verfahrens kann die Funktion $h(j) := \lim_{n\to\infty}\left(V^b_{\alpha_n}(j) - V^b_{\alpha_n}(0)\right)$ für eine Folge $(\alpha_n)_{n\in N} \subset (0,1)$ mit $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 1$ konstruiert werden. Seien $g(j) := h(j) - (d(j,j) - d(j,0))$ und $g_n(j) := h_n(j) - (d(j,j) - d(j,0))$. Als erstes wird der Fall $\tilde{i}^* < \infty$ behandelt: Hier gilt $g(\tilde{i}^*) > 0$; $g(0) \leq 0, \ldots, g(\tilde{i}^* - 1) \leq 0$. Aus $\lim_{n\to\infty} g_n(\tilde{i}^*) = g(\tilde{i}^*)$ folgt $g_n(\tilde{i}^*) > 0\;\forall n \geq n_0$, $n_0 \in I\!N$. Somit ist $i^*_{\alpha_n} \leq \tilde{i}^*\;\forall n \geq n_0$. Daher existiert eine Teilfolge von $(\alpha_n)_{n\in N}$, so daß $\lim_{n\to\infty} i_{\alpha_n}$ existiert. O.B.d.A. war die Folge $(\alpha_n)_{n\in N}$ so konstruiert, daß diese Teilfolge $(\alpha_n)_{n\in N}$ entspricht, $i^* = \lim_{n\to\infty} i_{\alpha_n} (\leq \tilde{i}^*)$ existiert also. Für eine bang-bang Strategie mit beliebigem Schwellenwert j^* gilt nach Satz 17(4):

$$\phi_{\delta_{j^*}} = \lim_{n\to\infty}(1-\alpha_n)V_{\delta_{j^*},\alpha_n}(0) \geq \lim_{n\to\infty}(1-\alpha_n)V_{\delta_{i^*_{\alpha_n}},\alpha_n}(0) = \lim_{n\to\infty}(1-\alpha_n)V_{\delta_{i^*},\alpha_n}(0) = \phi_{\delta_{i^*}}.$$

Die vorletzte Identität folgt aus der Konvergenz $i^* = \lim_{n\to\infty} i^*_{\alpha_n}$ in $Z\!\!Z^+$: $\exists n_0 \in I\!N : i_{\alpha_n} = i^*\;\forall n \geq n_0$. Somit ist die Optimalität von δ_{i^*} gezeigt. Nun werden die anderen im Satz erwähnten Strategien betrachtet: Offensichtlich gilt $g(\tilde{i}^* - 1) \leq 0$.

Fall 1: $g(\tilde{i}^*-1) < 0 \Rightarrow \exists n_0 \in I\!N:\; g(\tilde{i}^*_{\alpha_n}-1) < 0\;\forall n \geq n_0 \Rightarrow \tilde{i}^*_{\alpha_n} \geq \tilde{i}^*\;\forall n \geq n_0 \Rightarrow i^* \geq \tilde{i}^*$.

Da die Ungleichung $i^* \leq \tilde{i}^*$ bereits gezeigt ist, stimmt in diesem Fall i^* mit $\tilde{i}^*$ überein.

Fall 2: $\exists j \in \{1, \ldots, \tilde{i}^*\}:\; g(\tilde{i}^*-1) = \ldots = g(\tilde{i}^*-j) = 0$ und $(g(i^*-j-1) < 0$ falls $j < i^*)$.

Wenn $i^* < \tilde{i}^*-j$ gelten würde, muß zunächst $j < \tilde{i}^*$ sein. Außerdem wäre $g(i^*) < 0$, und somit gäbe es ein $n_0 \in I\!N$ mit $g_n(i^*) < 0\;\forall n \geq n_0$ und somit $i^*_{\alpha_n} > i^* = \lim_{r\to\infty} i_{\alpha_r}\;\forall n \geq$

n_0, was nicht sein kann. Somit ist $i^* \geq \tilde{i}^* - j$, und es gilt: $g(\tilde{i}^* - 1) = ... = g(i^*) = 0$. Aus der Tatsache, daß zum einen $g(i^*) = 0$ gilt und zum anderen δ_{i^*} optimal in Π_1^b ist, folgt nun:

$\lim_{n\to\infty} \left(\left(d(i^*, 0) + \alpha_n V^b_{\alpha_n}(i^*) \right) - \left(d(i^*, i^*) + \alpha_n V^b_{\alpha_n}(0) \right) \right) = 0,$ so daß für $\epsilon > 0$ gilt:

$\exists n_0 \in I\!N : \left| d(i^*, 0) + \alpha_n V^b_{\alpha_n}(i^*) - (d(i^*, i^*) + \alpha_n V^b_{\alpha_n}(0)) \right| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0$. Somit gilt:

$$\exists n_0 \in I\!N : \left| d(i^*, \delta(i^*)) + \alpha_n V^b_{\alpha_n}(i^* - \delta(i^*)) - \min_{a\in\{0,j\}} \left\{ d(i^*, a) + \alpha_n V^b_{\alpha_n}(i^* - a) \right\} \right| < \epsilon$$

$\forall \delta \in \Pi_1^b \; \forall n \geq n_0$, denn $\delta(i^*) \in \{0, i^*\} \; \forall \delta \in \Pi_1^b$. Nun sei $\delta = \delta_{i^*-1}$.

$$\exists n_0 \in I\!N : \left| d(i^*, \delta_{i^*-1}(i^*)) + \alpha_n V^b_{\alpha_n}(i^* - \delta_{i^*-1}(i^*)) - \min_{a\in\{0,j\}} \left\{ d(i^*, a) + \alpha_n V^b_{\alpha_n}(i^* - a) \right\} \right| < \epsilon$$

$\forall n \geq n_0$. Außerdem existiert ein $n_1 \in I\!N$, so daß δ_{i^*} α_n-optimal ist für alle $n \geq n_1$:

$$\left| d(i, \delta_{i^*}(i)) + \alpha_n V^b_{\alpha_n}(i - \delta_{i^*}(i)) - \min_{a\in\{0,i\}} \left\{ d(i, a) + \alpha_n V^b_{\alpha_n}(i - a) \right\} \right| = 0 \quad \forall n \geq n_1.$$

Da sich die Strategien δ_{i^*} und δ_{i^*+1} nur in dem Wert i^* unterschiedlich entscheiden, gilt für alle Zustände $i \in I \backslash \{i^*\}$:

$$\left| d(i, \delta_{i^*+1}(i)) + \alpha_n V^b_{\alpha_n}(i - \delta_{i^*+1}(i)) - \min_{a\in\{0,i\}} \left\{ d(i, a) + \alpha_n V^b_{\alpha_n}(i - a) \right\} \right| = 0 \; \forall n \geq n_1.$$

Zusammengefaßt gibt es also für alle $\epsilon > 0$ ein $n_2 \in I\!N$, so daß für alle $n \geq n_2$ gilt:

$$\left| d(i, \delta_{i^*+1}(i)) + \alpha_n V^b_{\alpha_n}(i - \delta_{i^*+1}(i)) - \min_{a\in\{0,i\}} \left\{ d(i, a) + \alpha_n V^b_{\alpha_n}(i - a) \right\} \right| < \epsilon \; \forall n \geq n_2$$

$\forall i \in I$. Nach dem Satz 8 gilt somit für alle $n \geq n_2$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} V_{\delta_{i^*+1},\alpha_n}(i) - V^b_{\alpha_n}(i) &\leq \frac{\epsilon}{1-\alpha_n}. \quad \text{Dies führt zu der folgenden Identität:} \\ \phi_{\delta_{i^*+1}} - \phi^b &= \lim_{n\to\infty}(1-\alpha_n)V_{\delta_{i^*+1},\alpha_n}(i) - \lim_{n\to\infty}(1-\alpha_n)V^b_{\alpha_n} \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig gewählt war, ist $\phi_{\delta_{i^*+1}}$ ebenfalls Durchschnittskosten-optimal. Außerdem gilt $g(i^* + 1) = 0$. Somit kann die Argumentation mit $i^* + 1$ statt i^* wiederholt werden. So erhält man rekursiv die Optimalität der bang-bang Strategien mit den Schwellenwerten $i^*, ..., \tilde{i}^*$.

Damit ist diese Fallunterscheidung beendet. Nun sei $\tilde{i} = \infty$. Dies bedeutet $g(i) \leq 0 \; \forall i \in I$. Nun wird eine neue Fallunterscheidung vollzogen:

Fall 1: $g(i) < 0 \; \forall i \in I \qquad \Rightarrow \qquad \forall i \in I \; \exists n_0 \in I\!N : \; g_n(i) < 0 \; \forall n \geq n_0.$

Nun ist also $\tilde{i}^* = i^* = \infty$: Weil die Kostenfunktionen r und d beschränkt und nichtfallend sind, existieren reelle Konstanten $\tilde{r}$ und $\tilde{d}$ und eine Funktion $\epsilon : \mathbb{Z}^+ \to I\!R^+$

mit $0 \le \tilde{r} - r(j) \le \frac{1}{2}\epsilon(j)$, $0 \le \tilde{d} - d(j,0) \le \frac{1}{2}\epsilon(j)$, $\epsilon(j) \ge \epsilon(j+1)$ und $\lim_{j\to\infty} \epsilon(j) = 0$. Als nächstes wird unter Verwendung der Folge $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1$ und $\phi = \lim_{n\to\infty}(1-\alpha_n)V_{\alpha_n}(i)$ das Folgende berechnet:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\alpha_n\sum_{j=i}^{i^*_\alpha-1}p_{ij}\right)V_{\alpha_n}(i)-\phi=\lim_{n\to\infty}\left(1-\alpha_n\sum_{j=i}^{i^*_\alpha-1}p_{ij}\right)V_{\alpha_n}(i)-\lim_{n\to\infty}(1-\alpha_n)V_{\alpha_n}(i)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\alpha_n\left(1-\sum_{j=i}^{i^*_\alpha-1}p_{ij}\right)V_{\alpha_n}(i)=0, \text{ weil es ein } n_0\in I\!N \text{ gibt, so daß } i^*_{\alpha_n}>\max A_i$$

$\forall n \ge n_0$ folgt, so daß sich $\sum_{j=i}^{i^*_{\alpha_n}-1} p_{ij} = 1 \ \forall n \ge n_0$ ergibt. Inzwischen bekannt ist die Gleichung

$$\begin{aligned}
V_\alpha(i) &= r(i)+\sum_{j=i}^{i^*_\alpha-1}p_{ij}\left(d(j,0)+\alpha V_\alpha(j)\right)+\sum_{j=i^*_\alpha}^{N}p_{ij}\left(d(j,j)+\alpha V_\alpha(0)\right)\\
&\ge r(i)+\sum_{j=i}^{i^*_\alpha-1}p_{ij}\left(d(j,0)+\alpha V_\alpha(i)\right)\\
&\ge \tilde{r}-\frac{1}{2}\epsilon(i)+\sum_{j=i}^{i^*_\alpha-1}p_{ij}\left(\tilde{d}-\frac{1}{2}\epsilon(j)+\alpha V_\alpha(i)\right)\forall i\in Z\!\!\!Z^+\,\forall\alpha\in(0,1)\\
\Rightarrow \tilde{r}-\frac{1}{2}\epsilon(i) &\le V_{\alpha_n}(i)-\sum_{j=i}^{i^*_{\alpha_n}-1}p_{ij}\left(\tilde{d}-\frac{1}{2}\epsilon(i)+\alpha_n V_{\alpha_n}(i)\right) \text{ wegen } e(i)\ge e(j)\\
&=\left(1-\alpha_n\sum_{j=i}^{i^*_{\alpha_n}-1}p_{ij}\right)V_{\alpha_n}(i)-\sum_{j=i}^{i^*_{\alpha_n}-1}p_{ij}\left(\tilde{d}-\frac{1}{2}\epsilon(i)\right)\forall i\in Z\!\!\!Z^+\,\forall n\ge n_0.
\end{aligned}$$

Der Grenzübergang $n\to\infty$ ($\Rightarrow i^*_{\alpha_n}\to\infty$) und das erste Resultat dieses Teilbeweises

ergeben $$\tilde{r}-\frac{1}{2}\epsilon(i) \quad\le\quad \phi-\left(\tilde{d}-\frac{1}{2}\epsilon(i)\right) \quad \forall i\in Z\!\!\!Z^+.$$

Aus $p_{ii}<1\ \forall i\in Z\!\!\!Z^+$ folgt $\phi_{\delta_\infty}=\tilde{r}+\tilde{d}\le\phi+\epsilon(i)\,\forall i\in Z\!\!\!Z^+$, und somit $\phi_{\delta_\infty}\le\phi$ gilt (denn $\lim_{i\to\infty}\epsilon(i)=0$), so daß δ_∞ die Durchschnittskosten minimiert.

Fall 2: Es existiert ein Zustand N_0 aus I, so daß $g(i)=0$ ist für alle Zustände $i\ge N_0$ und $g(i)<0$ für alle Zustände $i<N_0$. Somit existiert für alle Zustände $i<N_0$ ein $n_0\in I\!N$ mit $g_n(i)<0\ \forall n\ge n_0$. Für alle $i<N_0$ gilt also $i^*>i$, und somit ist $i^*\ge N_0$. Nun kann die Folge $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ wieder o.B.d.A. so konstruiert sein, daß entweder $\lim_{n\to\infty} i^*_{\alpha_n}=i^*=\infty$ gilt, oder $i^*\in\{N_0,N_0+1,...\}$ existiert. Der Fall $i^*=\infty$ ist schon oben behandelt worden. Aber auch für den Fall $i^*\in\{N_0,N_0+1,...\}$ gibt es nichts neues zu zeigen: δ_{i^*} ist optimal ($\phi_{\delta_j}\ge\phi_{\delta_{i^*}}\ \forall j\in I$ wurde bereits oben gezeigt) und wegen $i^*\ge N_0$ gilt $g(i^*)=0$. Genauso wie im Fall 2 der ersten Fallunterscheidung ist dann auch δ_{i^*+1} optimal. Rekursiv erhält man die Optimalität der bang-bang Strategien mit Schwellenwert i aus $\{i^*,i^*+1,...\}$, und die Optimalität von δ_∞ schließlich ergibt sich genauso wie im Fall 1 ($i^*=\tilde{i}^*=\infty$), da auch hier ein $\alpha_0\in(0,1)$ existiert mit $i^*_\alpha > \max A_i \; \forall \alpha \geq \alpha_0$. ■

Dieser Satz wird am Ende des folgenden Abschnittes 'unbeschränkte Kosten' erneut für unbeschränkte Kostenfunktionen aufgeführt. Ergebnisse dieses Abschnittes sorgen dafür, daß auf die letzte Bedingung (bzgl. der Menge A_i) verzichtet werden kann. Für den folgenden Satz gilt dieses ebenfalls:

Satz 24 *Es sei $(\alpha_n)_{n\in N}$ die Folge von Diskontierungsfaktoren aus dem letzten Satz. Wenn die Bedingungen (1), ..., (7) erfüllt sind, minimieren die bang-bang Strategien mit Schwellenwerten $\{i^*, i^*+1, ..., \tilde{i}^*\}$ die Durchschnittskosten mit*
$\tilde{i}^* = \min\{j \in \mathbb{Z}^+ : \lim_{n\to\infty} (V_{\alpha_n}(j) - V_{\alpha_n}(0)) > d(j,j) - d(j,0)\}$ $(\min \emptyset := \infty)$.
Wenn i^* gleich unendlich ist, gilt diese Aussage ebenfalls unter der folgenden Bedingung für jedes $i \in \mathbb{Z}^+$: $p_{ii} \neq 1$, und es existiert eine endliche Menge A_i, so daß $p_{ij} = 0 \; \forall j \notin A_i$ gilt.

Beweis: Der Beweis ist identisch mit dem des letzten Satzes mit Ausnahme des Anfangs: Unter den Bedingungen (1), ..., (7) minimiert die bang-bang Strategie mit Schwellenwert i_α die $\alpha-$diskontierten Kosten in der Klasse Π_1. Für jede Strategie δ erhalten wir

$$\phi_\delta = \lim_{n\to\infty}(1-\alpha_n)V_{\delta,\alpha_n}(0) \geq \lim_{n\to\infty}(1-\alpha_n)V_{\delta_{i^*_{\alpha_n}},\alpha_n}(0) = \lim_{n\to\infty}(1-\alpha_n)V_{\delta_{i^*},\alpha_n}(0) = \phi_{\delta_{i^*}}.$$

Nach dem Austausch des Ergebnisses von Satz 10 durch das Ergebnis von Satz 15 und V^b_α durch V_α (sind hier identisch) im Beweis des letzten Satzes ist vollständig bewiesen, daß die bang-bang Strategien mit Schwellenwerten $\{i^*, i^*+1, ..., \tilde{i}^*\}$ die Durchschnittskosten optimieren. ■

Unbeschränkte Kosten

Nun seien beide Kostenfunktionen möglicherweise nach oben unbeschränkt, allerdings bleibt die Beschränktheit nach unten erhalten. Deshalb werden hier o.B.d.A. nur nichtnegative Kostenfunktionen behandelt. Die Durchschnittskostenfunktion $\phi_\delta(i)$ unter der Strategie $\delta \in \Pi_1$ in $i \in I$ sieht nun folgendermaßen aus:

$$\phi_\delta(i) = \limsup_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} E_\delta\left(\sum_{n=0}^{m}\left(r(X_n)+\sum_{j=0}^{N} P(X^-_{n+1}=j|X_n)d(j,\delta(j))\right)\middle| X_0 = i\right),$$

falls der Erwartungswert $E_\delta\left(r(X_n)+\sum_{j=i}^{N} P(X^-_{n+1}=j|X_n)d(j,\delta(j))\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

existiert. Ist dies nicht der Fall, wird $\phi_\delta(i) = \infty$ gesetzt. Aus der inzwischen bekannten, Lemma 1 verwendeten Argumentation ist die Existenz dieser Erwartungswerte gesichert, wenn

$$\sum_{j=i}^{N} p_{ij}^{(n)} \max_{\{0\leq k\leq j\}} \{r(k)\} < \infty \; \forall n \in I\!N \text{ und } \sum_{j=i}^{N} p_{ij}^{(n)} \max_{\{0\leq a\leq k\leq j\}} \{d(k,a)\} < \infty \; \forall n \in I\!N \text{ gilt.}$$

Ist sowohl r als auch d in beiden Komponenten monoton nicht-fallend und somit schon nach unten beschränkt, reduzieren sich beide Ungleichungen zu

$$\sum_{j=i}^{N} p_{ij}^{(n)} r(j) < \infty \text{ und } \sum_{j=i}^{N} p_{ij}^{(n)} d(j,j) < \infty \quad \forall n \in I\!N.$$

Um den Fall $\phi := \inf_{\{\delta\in\Pi_1\}} \phi_\delta \equiv \infty$ auszuschließen, wird die folgende Voraussetzung verlangt:

Voraussetzungen für unbeschränkte Kostenfunktionen:
Es sei $(Z_i)_{i\in I}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit Wertebereich $\{d(i,i)\ i \in \mathbb{Z}^+\}$. Die Zufallsvariable Z_i habe die folgende Verteilung: $P(Z_i = d(j,j)) = p_{ij}$. Verlangt wird, daß der Erwartungswert jeder Zufallsvariablen Z_i existiert. Außerdem sei die Bedingung A des diskontierten Modells erfüllt.

Es sei δ_1 die bang-bang Strategie mit Schwellenwert 1. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\phi_{\delta_1}(i) &= \limsup_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} E_{\delta_1}\left(\sum_{n=0}^{m} \left(r(X_n) + \sum_{j=0}^{N} P(X_{n+1}^- = j|X_n) d(j,\delta_1(j)) \right) \middle| X_0 = i \right) \\
&= \limsup_{m\to\infty} \frac{r(i) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} d(j,j) + m\left(r(0) + \sum_{j=0}^{N} p_{0j} d(j,j)\right)}{m+1} \\
&= \limsup_{m\to\infty} \frac{r(i) + E(Z_i) + m(r(0) + E(Z_0))}{m+1} = r(0) + E(Z_0) < \infty
\end{aligned}$$

und somit $\phi(i) \leq \phi_{\delta_1}(i) < \infty \quad \forall i \in I$.

Lemma 14

Es ist (1) $\limsup_{\alpha\uparrow 1} (1-\alpha) V_\alpha(i) \leq \phi(i) \; \forall i \in I$

und (2) $\limsup_{\alpha\uparrow 1} (1-\alpha) V_\alpha^b(i) \leq \phi^b(i) \; \forall i \in I$

und (3) $\limsup_{\alpha\uparrow 1} (1-\alpha) V_{\delta,\alpha}(i) \leq \phi_\delta(i) \; \forall \delta \in \Pi_1, \; \forall i \in I.$

Beweis: Nach einem Abelschen Satz (z.B. Hernandez-Lerma, Lasserre [10], Lemma 5.3.1) gilt für eine Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty} \subset I\!R^+$:

$$\limsup_{\alpha\uparrow 1} (1-\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x_n \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_n.$$

Nun wähle man $x_n := E\left(c_\delta(n)|\, X_0 = i\right)$ für $\delta \in \Pi_1$ (bzw. $\delta \in \Pi_1^b$), $i \in I$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\limsup_{\alpha\uparrow 1}(1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n E\left(c_\delta(n)|\, X_0 = i\right) &\leq \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}E\left(c_\delta(n)|\, X_0 = i\right) \\
\overset{B.L.}{\Rightarrow} \limsup_{\alpha\uparrow 1}(1-\alpha)V_{\delta,\alpha}(i) &\leq \phi_\delta(i) \quad \Rightarrow \quad \text{Aussage 3.} \\
\Rightarrow \limsup_{\alpha\uparrow 1}(1-\alpha)V_\alpha(i) &\leq \phi_\delta(i) \quad \forall\delta\in\Pi_1 \\
\text{und } \limsup_{\alpha\uparrow 1}(1-\alpha)V_\alpha^b(i) &\leq \phi_\delta^b(i) \quad \forall\delta\in\Pi_1^b \\
\Rightarrow \limsup_{\alpha\uparrow 1}(1-\alpha)V_\alpha(i) &\leq \phi(i) < \infty \\
\text{und } \limsup_{\alpha\uparrow 1}(1-\alpha)V_\alpha^b(i) &\leq \phi^b(i) < \infty \quad \Rightarrow \quad \text{Aussagen 1. und 2.} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Da $\phi(i) \leq \phi^b(i) \leq \phi_{\delta_1}(i) < \infty$ gilt, sind somit die Funktionen $\alpha \to (1-\alpha)V_\alpha(i)$ und $\alpha \to (1-\alpha)V_\alpha^b(i)$ beschränkt. Dieses Resultat hatte unter den Voraussetzungen (1), ..., (3) auch schon das Korollar 3 geliefert.

Das letzte Lemma sagt aus, daß es eine Folge $(\alpha_n)_{n\in N}$ von Diskontierungsfaktoren mit Grenzwert 1 gibt, so daß für jedes $i \in I$ die Folge $((1-\alpha_n)V_{\alpha_n}(i))_{n\in N}$ konvergiert. Das folgende Lemma sagt nun aus, daß die Grenzwerte dieser Folgen identisch sind:

Lemma 15 *Die Voraussetzungen (1), ..., (3) seien erfüllt und es sei $\delta \in \Pi_1$. Dann gilt:*

1. *Es existiert ein $g \in I\!R^+$ und eine gegen den Wert 1 aufsteigende Folge von Diskontierungsfaktoren $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ mit $\lim_{n\to\infty}(1-\alpha_n)V_{\alpha_n}(i) = g\ \forall i \in I$.*

2. *Es existiert ein $g^b \in I\!R^+$ und eine gegen den Wert 1 aufsteigende Folge von Diskontierungsfaktoren $(\alpha_n^b)_{n=1}^\infty$ mit $\lim_{n\to\infty}(1-\alpha_n^b)V^b_{\alpha_n^b}(i) = g^b\ \forall i \in I$.*

Beweis: (1) Nach dem letzten Lemma gibt es offensichtlich Werte g, $g^b \in I\!R^+$ und gegen den Wert 1 aufsteigende Folgen von Diskontierungsfaktoren $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ und $(\alpha_n^b)_{n=1}^\infty$ mit $\lim_{n\to\infty}(1-\alpha_n)V_{\alpha_n}(0) = g$ und $\lim_{n\to\infty}(1-\alpha_n^b)V_{\alpha_n^b}(0) = g^b$. Nun gilt für alle $i \in I$:

$$\begin{aligned}
|(1-\alpha_n)V_{\alpha_n}(i) - g| &= (1-\alpha_n)|V_{\alpha_n}(i) - V_{\alpha_n}(0)| \\
&\leq (1-\alpha_n)\left(r(i) + \sum_{j=i}^{N}p_{ij}d(j,j)\right) = (1-\alpha_n)(r(i) + E(Z_i))
\end{aligned}$$

nach dem Beweis von Satz 19(2). Somit ist

$$\lim_{n\to\infty}|(1-\alpha_n)V_{\alpha_n}(i) - g| \leq \lim_{n\to\infty}(1-\alpha_n)|r(i) + E(Z_i)| = 0.$$

Genauso läßt sich die Ungleichung $\lim\limits_{n\to\infty}|(1-\alpha_n^b)V_{\alpha_n^b}(i) - g^b| \leq 0\ \forall i \in I$ zeigen. $\blacksquare$

Der Satz 17 kann in ähnlicher Form auch für unbeschränkte Kosten angegeben werden. In der folgenden Formulierung werden gleich die Funktion h und die Konstante g des kanonischen Tripels (g, h, δ^*) angegeben.

Satz 25 *Die Voraussetzungen $(1),...,(3)$ seien erfüllt. Es seien (α_n) und (α_n^b) die gegen 1 konvergierende Folge von Diskontierungsfaktoren aus dem letzten Lemma,*

$$h(i) := \liminf_{n\to\infty} (V_{\alpha_n}(i) - V_{\alpha_n}(0)) \ \forall i \in I \ \textit{und wie zuletzt ist } g := \lim_{n\to\infty}(1-\alpha_n)V_{\alpha_n}(0);$$

$$h^b(i) := \liminf_{n\to\infty} \left(V^b_{\alpha^b_n}(i) - V^b_{\alpha^b_n}(0)\right) \ \forall i \in I \ \textit{und wie zuletzt ist } g^b := \lim_{n\to\infty}(1-\alpha^b_n)V_{\alpha^b_n}(0).$$

1. *δ^* sei die Strategie, für die die Identität*

$$d(j,\delta^*(j)) + h(j-\delta^*(j)) = \min_{\{0\le a\le j\}}\{d(j,a)+h(j-a)\} \ \textit{gilt.}$$

   Dann ist (g,h,δ^*) ein kanonisches Tripel, somit δ^* Durchschnittskosten-optimal, und es gilt $\phi = \phi_{\delta^*} \equiv g$.

2. *δ_b^* sei die Strategie, für die die Identität*

$$d(j,\delta_b^*(j)) + h(j-\delta_b^*(j)) = \min_{a\in\{0,j\}}\{d(j,a)+h(j-a)\} \ \textit{gilt.}$$

   Dann ist (g,h,δ^*) ein kanonisches Tripel bzgl. des Raumes Π_1^b, δ^* Durchschnittskosten-optimal in der Klasse der bang-bang Strategien, und es gilt $\phi^b = \phi^b_{\delta^*} \equiv g$.

Beweis: Zunächst werden für $\alpha \in [0,1)$ die folgenden Funktionen $h_\alpha : I \to I\!R^+$ und $g : [0,1) \to I\!R^+$ definiert: es seien $h_\alpha(i) = V_\alpha(i) - V_\alpha(0)$ und $g(\alpha) = (1-\alpha)V_\alpha(0)$, so daß $h = \liminf_{n\to\infty} h_{\alpha_n}$ und $g = \lim_{n\to\infty} g(\alpha_n)$ ist. Letzteres ist unter den Voraussetzungen $(1),...,(3)$ durch das letzte Lemma definiert. Als erstes wird durch vollständige Induktion über $n \in I\!N$ die folgende Identität und damit die Existenz des kanonischen Tripels gezeigt:

$$ng+h(i) = E_{\delta^*}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(r(X_k)+d(X_{k+1}^-,\delta^*(X_{k+1}^-))\right)\Big|\, X_0 = i\right) + E_{\delta^*}(h(X_n)|X_0=i).$$

Induktionsanfang: $n = 1$: Für alle $i \in I$ gilt:

$$\begin{aligned}
g(\alpha)+h_\alpha(i) &= (1-\alpha)V_\alpha(0)+V_\alpha(i)-V_\alpha(0) = V_\alpha(i)-\alpha V_\alpha(0)\\
&= r(i)+\sum_{j=i}^N p_{ij}\min_{\{0\le a\le j\}}\{d(j,a)+\alpha V_\alpha(j-a)\}-\alpha V_\alpha(0)\\
&= r(i)+\sum_{j=i}^N p_{ij}\min_{\{0\le a\le j\}}\{d(j,a)+\alpha h_\alpha(j-a)\}\\
\Rightarrow \liminf_{n\to\infty}(g(\alpha_n)+h_{\alpha_n}(i)) &= r(i)+\sum_{j=i}^N p_{ij}\min_{\{0\le a\le j\}}\left\{d(j,a)+\liminf_{n\to\infty}\alpha_n h_{\alpha_n}(j-a)\right\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow g+h(i) &= r(i)+\sum_{j=i}^N p_{ij}\min_{\{0\le a\le j\}}\{d(j,a)+h(j-a)\}\\
&= E_{\delta^*}\left(\sum_{k=0}^{0}\left(r(X_k)+d(X_{k+1}^-,\delta^*(X_{k+1}^-))\right)\Bigg|\, X_0=i\right)+E_{\delta^*}(h(X_1)|X_0=i).
\end{aligned}$$

Nun folgt der Induktionsschluß $n-1 \to n$: Aus dem Induktionsanfang folgt:

$$\begin{aligned}
g + h(X_{n-1}) &= E_{\delta^*}\left(r(X_{n-1}) + d(X_n^-, \delta^*(X_n^-)\Big| X_{n-1}\right) + E_{\delta^*}(h(X_n)|X_{n-1}) \\
\Rightarrow E_{\delta^*} h(X_{n-1}|X_0 = i) + g &= E_{\delta^*}\left(r(X_{n-1}) + d(X_n^-, \delta^*(X_n^-))\Big| X_0 = i\right) \\
&\quad + E_{\delta^*}(h(X_n)|X_0 = i).
\end{aligned}$$

Diese Identität wird in der letzten Gleichung der folgenden Gleichungskette verwendet:

$$\begin{aligned}
ng + h(i) &= (n-1)g + h(i) + g \\
&\overset{I.V.}{=} E_{\delta^*}\left(\sum_{k=0}^{n-2} r(X_k) + d(X_{k+1}^-, \delta^*(X_{k+1}^-))\middle| X_0 = i\right) + E_{\delta^*}\left(h(X_{n-1}|X_0 = i\right) + g \\
&= E_{\delta^*}\left(\sum_{k=0}^{n-1} r(X_k) + d(X_{k+1}^-, \delta^*(X_{k+1}^-))\middle| X_0 = i\right) + E_{\delta^*}\left(h(X_n)|X_0 = i\right).
\end{aligned}$$

Somit ist der Induktionsbeweis vollbracht, und es gilt die Identität

$$g = \frac{1}{n} E_{\delta^*}\left(\sum_{k=0}^{n-1} r(X_k) + d(X_{k+1}^-, \delta^*(X_{k+1}^-))\middle| X_0 = i\right) + \frac{1}{n} E_{\delta^*}(h(X_n)|X_0 = i) - \frac{1}{n} h(i).$$

Als nächstes wird der Grenzübergang $n \to \infty$ gebildet. Zum einen gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} h(i) = 0$ und zum anderen folgt aus Satz 9 $h_\alpha \geq 0\ \forall \alpha \in (0,1)$ und somit $h \geq 0$, so daß die folgende Ungleichung gilt:

$$g \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} E_{\delta^*}\left(\sum_{k=0}^{n-1} r(X_k) + d(X_{k+1}^-, \delta^*(X_{k+1}^-))\middle| X_0 = i\right) = \phi_{\delta^*}(i).$$

Außerdem gilt $g = \lim_{\alpha\uparrow 1}(1-\alpha)V_\alpha(0) \overset{\text{Lemma 14.2}}{\leq} \phi(i) \leq \phi_{\delta^*}(i)$, und somit ist $g = \phi_{\delta^*}(i)\ \forall i \in I$.

Für den Beweis des zweiten Teils wird $h_\alpha^b(i) := V_\alpha^b(i) - V_\alpha^b(0)$, $h^b := \liminf_{n\to\infty} h_{\alpha_n^b}^b$ und $g^b = \lim_{n\to\infty} g(\alpha_n^b)$ verwendet. Nun brauchen im obigen Beweis nur noch die Ausdrücke α_n durch α_n^b, g durch g^b, h durch h^b, $\min_{\{0\leq a\leq j\}}$ durch $\min_{a\in\{0,j\}}$ und δ^* durch δ_b^* ausgetauscht zu werden. ■

Die beiden wichtigen Aussagen in jedem Teil dieses Satzes werden in den folgenden zwei Korollaren folgendermaßen formuliert:

Korollar 6 *aus Lemma 14 und Satz 25:*
Es seien $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ und $(\alpha_n^b)_{n=1}^\infty$ nach oben gegen den Wert 1 konvergierende, nach Lemma 14 existierende Folgen von Diskontierungsfaktoren, so daß die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty}(1-\alpha_n)V_{\alpha_n}(0) \text{ und } \lim_{n\to\infty}(1-\alpha_n^b)V_{\alpha_n^b}^b(0) \text{ existieren.}$$

Unter den Voraussetzungen $(1), \ldots, (3)$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty}(1-\alpha_n)V_{\alpha_n}(i) = \phi \quad \forall i \in I \text{ und } \lim_{n\to\infty}(1-\alpha_n^b)V_{\alpha_n^b}^b(i) = \phi^b \quad \forall i \in I.$$

Lemma 13 und Korollar 5 des Abschnittes *'Der allgemeine Zustandsraum $N < \infty$ oder $N = \infty$'* behalten auch für nach oben unbeschränkte Kostenfunktionen ihre Gültigkeit. Dagegen benötigen die Sätze 23 und 24 die Bedingungen A und B und im Fall $\tilde{i}^* = i^* = \infty$ die Kostenbeschränktheit. Der dort verwendete Beweis kann nur in den folgenden Fällen nicht benutzt werden:

$$\text{(a)} \ \lim_{i\to\infty} r(i) = \infty \text{ oder (b) } \lim_{i\to\infty} d(i,0) = \infty.$$

Natürlich handelt es sich hier nicht um ein ausschließendes *oder*.

Wegen $\phi_{\delta_\infty}(i) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} p_{ij}^{(k)} r(j) + \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} d(j,0) \right)$ folgt in den Fällen (a) oder (b) allerdings $\phi_{\delta_\infty} \equiv \infty > \phi_{\delta_1}$, so daß die Strategie δ_∞ auch nicht optimal sein kann. Um zunächst Satz 26 angeben zu können, der auch im Fall $i^* = \infty$ das gewünschte Ergebnis liefert, wird mit Hilfe des letzten Korollars 6 zunächst der Existenzsatz Satz 25 neu formuliert:

Korollar 7 *Es seien $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ und $(\alpha_n^b)_{n=1}^\infty$ nach oben gegen 1 konvergierende Folgen von Diskontierungsfaktoren, so daß die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty}(1-\alpha_n)V_{\alpha_n}(0)$ und $\lim_{n\to\infty}(1-\alpha_n^b)V_{\alpha_n^b}(0)$ existieren. Dann gilt:*

1. *Unter den Bedingungen $(1), ..., (3)$ minimiert diejenige Strategie δ_b^* in Π_1^b die Durchschnittskosten, die die folgende Gleichung erfüllt:*

$$\begin{aligned} & d(i,\delta_b^*(i)) + \liminf_{n\to\infty} \left(V_{\alpha_n}^b(i-\delta_b^*(i)) - V_{\alpha_n}^b(0) \right) \\ = \quad & \min_{a\in\{0,i\}} \left\{ d(i,a) + \liminf_{n\to\infty} \left(V_{\alpha_n}^b(i-a) - V_{\alpha_n}^b(0) \right) \right\} \quad \forall i \in I. \end{aligned}$$

2. *Unter den Bedingungen $(1), ..., (7)$ (der Austausch der Bedingung (4) durch die Bedingung (4a) ist wie immer möglich) minimiert diejenige Strategie δ^* in Π_1 die Durchschnittskosten, die die folgende Gleichung erfüllt:*

$$\begin{aligned} & d(i,\delta^*(i)) + \liminf_{n\to\infty} \left(V_{\alpha_n}(i-\delta^*(i)) - V_{\alpha_n}(0) \right) \\ = \quad & \min_{a\in\{0,...,i\}} \left\{ d(i,a) + \liminf_{n\to\infty} \left(V_{\alpha_n}(i-a) - V_{\alpha_n}(0) \right) \right\} \quad \forall i \in I. \end{aligned}$$

Nun geht es auch hier um die Ermittlung der optimalen Strategie unter bereits bekannten Voraussetzungen. Dabei wird zunächst anders vorgegangen als unter der Voraussetzung der beschränkten Kosten:

Satz 26 *Der Wert i_α^* sei erneut der Schwellenwert der bang-bang Strategie, die die $\alpha-$diskontierten Kosten in Π_1^b unter den Bedingungen A und B, (1), (2) und (3) minimiert.*
Es seien die Bedingungen A, B, $(1), (2)$ und (3) erfüllt. Dann gibt es eine Folge $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ von Diskontierungsfaktoren mit $\alpha_n \uparrow 1$, so daß ein Wert $i^* \in I\!N \cup \{\infty\}$ existiert mit $i^* := \lim_{n\to\infty} i_{\alpha_n}^*$, und das Folgende gilt:

1. *Die bang-bang Strategie δ_{i^*} minimiert in Π_1^b die Durchschnittskosten.*

2. *Unter den zusätzlichen Voraussetzungen (4) oder (4a), (5), (6) und (7) minimiert δ_{i^*} in Π_1 die Durchschnittskosten.*

Beweis: Nach dem letzten Korollar 6 gibt es eine Folge von Diskontierungsfaktoren $(\alpha_n^b)_{n=1}^\infty$ mit $\alpha_n^b \uparrow 1$, so daß $\lim_{n\to\infty}(1-\alpha_n^b)V_{\alpha_n^b}^b(i) = \phi^b(i)\ \forall i \in I$ gilt. Nun sei $(\alpha_n)_{n=1}^\infty \subset (\alpha_n^b)_{n=1}^\infty$ so gewählt, daß $i^* := \lim_{n\to\infty} i_{\alpha_n}^*$ in $I\!N \cup \{\infty\}$ existiert. Wenn $i^* < \infty$ ist, gibt es also eine natürliche Zahl n_0, so daß $i_{\alpha_n}^* = i^*\ \forall n \geq n_0$ gilt. Im Fall $i^* = \infty$ existiert für alle $i \in I$ ein $n_0 \in I\!N$, so daß $\delta_{i_{\alpha_n}^*}(i) = 0 = \delta_{i^*}(i)\ \forall n \geq n_0$ gilt. Es ergibt sich die folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned}
& d(i,\delta_{i^*}(i)) + \liminf_{n\to\infty}\left(\alpha_n\left(V_{\alpha_n}^b(i-\delta_{i^*}(i)) - V_{\alpha_n}^b(0)\right)\right) \\
= \; & \liminf_{n\to\infty}\left(d(i,\delta_{i_{\alpha_n}^*}(i)) + \alpha_n\left(V_{\alpha_n}^b(i-\delta_{i_{\alpha_n}^*}(i)) - V_{\alpha_n}^b(0)\right)\right) \\
= \; & \liminf_{n\to\infty}\min_{a\in\{0,i\}}\left\{d(i,a) + \alpha_n\left(V_{\alpha_n}^b(i-a) - V_{\alpha_n}^b(0)\right)\right\} \\
= \; & \min_{a\in\{0,i\}}\left\{d(i,a) + \liminf_{n\to\infty}\alpha_n\left(V_{\alpha_n}^b(i-a) - V_{\alpha_n}^b(0)\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Die erste Aussage ergibt sich somit aus dem ersten Teil des letzten Satzes 25. Der zweite Teil von Satz 25 führt zu der zweiten Aussage dieses Satzes auf Grund der ähnlichen Gleichungskette

$$\begin{aligned}
& d(i,\delta_{i^*}(i)) + \liminf_{n\to\infty}\left(\alpha_n\left(V_{\alpha_n}(i-\delta_{i^*}(i)) - V_{\alpha_n}(0)\right)\right) \\
= \; & \liminf_{n\to\infty}\min_{a\in\{0,\ldots,i\}}\left\{d(i,a) + \alpha_n\left(V_{\alpha_n}(i-a) - V_{\alpha_n}(0)\right)\right\} \\
= \; & \min_{a\in\{0,\ldots,i\}}\left\{d(i,a) + \liminf_{n\to\infty}\alpha_n\left(V_{\alpha_n}(i-a) - V_{\alpha_n}(0)\right)\right\}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Es ist also ohne Kostenbeschränktheit der folgende Hauptsatz, der die Resultate der Sätze 23 und 24 unter unbeschränkten Kostenfunktionen zusammenfaßt, vollständig bewiesen. Unter i_α^* ist erneut der Schwellenwert der bang-bang Strategie zu verstehen, die unter den Bedingungen (1), (2), (3), A und B die $\alpha-$diskontierten Kosten minimiert:

Satz 27 *Es sei $(\alpha_{n,0})_{n=1}^\infty$ eine existierende Folge von Diskontierungsfaktoren mit $\lim_{n\to\infty}\alpha_{n,0} = 1$, so daß die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty}(1-\alpha_{n,0})V_{\alpha_{n,0}}^b(0)$ und $\lim_{n\to\infty} i_{\alpha_{n,0}}^*$ existieren. Der letzte Grenzwert sei i^*. Induktiv sei $(\alpha_{n,i})_{n=1}^\infty \subset (\alpha_{n,i-1})_{n=1}^\infty$, so daß*

$$\lim_{n\to\infty}\left(V_{\alpha_{n,i}}^b(i) - V_{\alpha_{n,i}}^b(0)\right) = \liminf_{n\to\infty}\left(V_{\alpha_{n,i}}^b(i) - V_{\alpha_{n,i}}^b(0)\right) \ \textit{ist.}$$

Nun sei $(\alpha_n)_{n=1}^\infty = \lim_{i\to N}(\alpha_{n,i})_{n=1}^\infty$. Dann gilt unter den Voraussetzungen (1), (2), (3), A und B: Es ist $i^* \leq \tilde{i}^* := \min\{j \in I : \lim_{n\to\infty}\left(V_{\alpha_n}^b(j) - V_{\alpha_n}^b(0)\right) > d(j,j) - d(j,0)\}$ ($\min\emptyset := \infty$). In der Unterklasse der bang-bang Strategien minimieren im Fall $\tilde{i}^* < \infty$

diejenigen mit Schwellenwert $\{i^*, i^*+1, ..., \tilde{i}^*\}$ *die Durchschnittskosten. Ist* $i^* = \tilde{i}^* = \infty$, *dann ist die Strategie* δ_∞ *optimal in bezug auf die Durchschnittskosten. Gelten* $i^* < \infty$ *und* $\tilde{i}^* = \infty$, *dann trifft dies auf alle Strategien* δ_{i^*}, $\delta_{i^*+1}, ...$ *zu.*
Unter den zusätzlichen Voraussetzungen (4) oder (4a), (5), (6) und (7) minimieren diese bang-bang Strategien die Durchschnittskosten im gesamten Raum Π_1.

2.3 Beispiele

Im folgenden werden die Ergebnisse, die die C-Implementierung der im letzten Kapitel angegeben Politik-Iteration bei konkreten Beispielen ergeben hat, dargestellt. Die Ergebnisse mit $N = 50$ sind zusätzlich durch eine Computer-Simulation, bei der alle möglichen Strategien getestet wurden, bestätigt worden. Als Beispiel wurde folgende parametrisierte Klasse von Größen gewählt:

$$r(i) = r_0 + i \cdot \gamma$$

$$\begin{array}{ll} \text{Fall a:} & d(0,0) = 0 \qquad d(1,0) = d_{1,0} \qquad d(1,1) = d_{1,1} \\ & \text{sonst}: d(i,a) = \kappa \left(\frac{a}{i-1}\right)^\beta + \delta i^\lambda \\ \text{Fall b}: & d(i,a) = \beta \cdot i + 1_{\{a>0\}} \left(\kappa \sqrt{i \cdot a} + \delta\right) \end{array}$$

$$p_{ij} = \begin{cases} \left(\frac{i+1}{j+1}\right)^\epsilon - \left(\frac{i+1}{j+2}\right)^\epsilon & j \geq i, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hier wird $r_0 = 10$ gewählt. Die benutzten Parameter haben den folgenden Wertebereich:

$$\alpha \in (0,1), \qquad \beta \in [0,1], \qquad \gamma \in I\!R^+, \qquad \delta \in I\!R^+, \qquad \epsilon \in (0,1], \qquad \mu \in I\!R^+.$$

$$\begin{array}{lll} \text{Fall a zusätzlich:} & \delta\lambda > \kappa\beta 2^{\beta+1}, \quad r_0 \in I\!R, \qquad d_0 \in I\!R; \\ \text{Fall b zusätzlich:} & 0 < \kappa < \gamma\alpha. \end{array}$$

Nun wird überprüft, ob die Bedingungen, die für die Existenz einer bang-bang Strategie als optimale Strategie nötig sind, auch erfüllt sind:
$r(i)$ ist monoton wachsend und linear, also insbesondere konkav. Im Fall a wird die Funktion $\tilde{d}$ mit

$$\tilde{d}(x,y) = \kappa \left(\frac{y}{x-1}\right)^\beta + \delta x^\lambda \quad \forall x \in (1,\infty), \forall y \in [0,x] \quad \text{definiert.}$$

Ansonsten ist diese Funktion nicht definiert. Die als nächstes gezeigte Monotonie und Konkavitiät überträgt sich auf die Kostenfunktion d für $i > 1$. Um diese Eigenschaften auf ganz $\mathbb{Z}^+$ zu haben, müssen dann noch die Konstanten d_{10} und d_{11} richtig gewählt werden. Im folgenden sei bei der ersten Ungleichung y auf $\mathbb{Z}^+$ eingeschränkt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{d}}{\partial x}(x,y) &= \delta\lambda x^{\delta-1} - \kappa\beta\left(\frac{y}{x-1}\right)^{\beta-1}\frac{y}{(x-1)^2} \\
&\overset{y\leq y^2}{\geq} \delta\lambda - \kappa\beta\left(\frac{y}{x-1}\right)^{\beta+1} \geq \delta\lambda - \kappa\beta 2^{\beta+1} > 0 \\
\frac{\partial \tilde{d}}{\partial y}(x,y) &= \kappa\beta\frac{y^{\beta-1}}{(x-1)^\beta} \geq 0 \\
\frac{\partial \tilde{d}}{\partial^2 y}(x,y) &= \kappa\beta(\beta-1)\frac{y^{\beta-2}}{(x-1)^\beta} \leq 0.
\end{aligned}$$

Im Fall b sind diese Eigenschaften offensichtlich ebenfalls erfüllt. Des weiteren gilt $\sum_{j=k}^\infty p_{ij} = \begin{cases} (\frac{i+1}{k+1})^\epsilon & k \geq i, \\ 1 & k \leq i. \end{cases}$
Dieser Ausdruck ist offensichtlich in i monoton nicht-fallend. Als nächstes wird der folgende Term betrachtet:

$$\sum_{j=k}^\infty p_{i+1,j} - \sum_{j=k}^\infty p_{ij} = \frac{(i+2)^\epsilon - (i+1)^\epsilon}{(k+1)^\epsilon} 1_{\{i\geq k\}}.$$

Diese Differenz ist wegen $0 \leq \epsilon < 1$ monoton nicht-wachsend. Abschließend muß noch die Differenz $d(i,i) - d(i,0)$ betrachtet werden. Begonnen wird mit dem Fall a:

$$d(i,i) - d(i,0) = \kappa\left(\frac{i}{i-1}\right)^\beta.$$

Auch dieser Term ist monoton nicht-wachsend.
Nun wird der Fall b behandelt:

$$\begin{aligned}
d(i,i) - d(i,0) &= \kappa i + \delta = \kappa(i-1) + (\kappa+\delta) \\
&= \rho\alpha(i-1) + d(1,1) - d(1,0) \text{ mit } \delta := \kappa,\ \rho := \frac{\kappa}{\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\kappa}{\alpha} < \gamma \Rightarrow \exists i_0 \in \mathbb{N} :\ r(i) - r(0) = \gamma i &\geq \frac{\kappa}{\alpha}i + \kappa + \delta - \frac{\kappa}{\alpha} \\
&= \rho(i-1) + d(1,1) - d(1,0) \quad \forall i \geq i_0.
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß diese Klasse von Größen die Bedingungen (1) bis (7) im Fall a und (4) durch (4a) ersetzt im Fall b erfüllt. Allerdings muß sich bei der Berechnung am Computer auf einen endlichen Zustandsraum $\{0, ..., N\}$ beschränkt werden. Dies geschieht durch die veränderte Wahl $p_{iN} := \sum_{j=N}^\infty p_{ij} \quad \forall i \in I$. Auch dann sind die gewünschten Bedingungen an die Übergangswahrscheinlichkeiten offensichtlich erfüllt. Wie erwartet, ergibt auch die Politikiteration bei den folgenden Beispielen immer eine bang-bang Strategie, wenn Größen aus dieser Klasse zugrunde gelegt wurden. In den folgenden Tabellen sind die gewählten Beispiele jeweils mit dem durch das Programm ermittelten Schwellenwert x_0 für die bang-bang Strategie angegeben. Zunächst wird der Fall a betrachtet: Die Spalte im mittleren Block muß nach den obigen Voraussetzungen immer nicht-negativ sein. Allerdings sind diese Voraussetzungen nur hinreichende und nicht notwendige Bedingungen. So kann auch dann die optimale Strategie eine bang-bang Strategie sein, wenn in diesen Spalten negative Werte stehen. Solche Beispiele sind in der folgenden Tabelle ebenfalls aufgeführt. Zunächst wird der Fall a betrachtet:

N	α	β	γ	δ	ϵ	κ	λ	d_{10}	d_{11}	$\delta\lambda-\kappa\beta 2^{\beta+1}$	x_0	$V_\alpha(0)$	$(1-\alpha)V_\alpha(0)$
1000	0.9	0.001	2	21	0.99	1000	0.1	20	1021	0.099	126	1801	181
1000	0.9	0.001	10	21	0.99	1000	0.1	20	1021	0.099	1	48301	4830
50	0.9	0.001	10	21	0.99	1000	0.1	20	1021	0.099	32	2398	240
50	0.995	0.001	10	21	0.99	1000	0.1	20	1021	0.099	25	54880	274.4
50	0.9999	0.001	10	21	0.99	1000	0.1	20	1021	0.099	25	$2754\cdot 10^3$	2 75.4
50	0.9	0.001	20	21	0.99	1000	0.1	20	1021	0.099	18	2751	275
50	0.995	0.001	20	21	0.99	1000	0.1	20	1021	0.099	15	61531	307.7
50	0.9999	0.001	20	21	0.99	1000	0.1	20	1021	0.099	14	$3083\cdot 10^3$	308.3
50	0.9	0.00001	10	21	0.99	1000	0.1	20	1021	0.099	32	2398	240
50	0.9	0.001	10	21	0.5	1000	0.1	20	1021	0.099	47	3911	391
50	0.9	0.001	10	21	0.99	1000	1.0	20	1021	2.08	8	4167	417
50	0.9	0.001	10	21	0.99	100	0.1	20	1021	19	4	544	54
50	0.9	0.001	10	40	0.99	1000	0.1	40	1041	2	31	2582	258
50	0.9	10	1	21	0.99	1000	0.1	20	1021	$-2\cdot 10^8$	/	384	38

In dem Beispiel der letzten Zeile sind die Bedingungen der Parameter nicht eingehalten. Hier ist auch keine bang-bang Strategie optimal. Die Politik-Iteration liefert als optimale Strategie die Strategie $\delta \in \Pi_1$ mit $\delta(i) := \lfloor \frac{29i}{50} \rfloor$.

Als nächstes werden Beispiele des Falles 'b' vorgestellt:

N	α	β	γ	δ	ϵ	κ	$\gamma\alpha - \kappa$	x_0	$V_\alpha(0)$	$(1-\alpha)V_\alpha(0)$
50	0.9	1.0	2.5	100	0.99	0.2	2.05	9	385	39
50	0.9	1.0	2.5	100	0.99	3.0	-0.75	5	540	54
50	0.995	1.0	2.5	100	0.99	3.0	-0.5	4	11353	56.8
50	0.9999	1.0	2.5	100	0.99	3.0	-0.5	4	565987	56.6
50	0.9	1.0	2.5	200	0.99	3.0	-0.75	11	795	80
50	0.9	1.0	2.5	500	0.99	3.0	-0.75	∞	1172	540
50	0.9	5.0	2.5	200	0.99	3.0	-0.75	5	1315	132
1000	0.9	1.0	2.5	100	0.99	3.0	-0.75	3	724	72
1000	0.9	1.0	2.5	500	0.99	3.0	-0.75	11	1815	182
1000	0.9	1.0	25	100	0.99	3.0	19.5	2	769	77
1000	0.9	1.0	25	500	0.99	3.0	19.5	6	2075	208
1000	0.9	1.0	2.5	500	0.5	3.0	-0.75	6	5370	537

Kapitel 3

Ein überabzählbarer Zustandsraum

In diesem Kapitel wird das letzte Modell in der folgenden Weise verallgemeinert: Der Zustandsraum wird von $\mathbb{Z}^+$ auf $\mathbb{R}^+$ bzw. von $\{0, ..., N\}$, $N \in \mathbb{Z}^+$ auf $[0, N]$, $N \in \mathbb{R}^+$ erweitert. Auch hier wird der Zustandsraum I generell mit $[0, N]$ bezeichnet für ein $N \in \overline{\mathbb{R}}^+$. Für $N = \infty$ wird er mit $\mathbb{R}^+$ identifiziert. Generell sei in diesem Kapitel unter dem Intervall $[a, N]$ bzw. $(a, N]$ für $N = \infty$ das Intervall $[a, \infty)$ bzw. (a, ∞) zu verstehen. Die Kostenfunktionen r und d sind dann offensichtlich auch auf I und I^2 definiert. Die stochastischen Prozesse $(X_n^-)_{n=1}^{\infty}$ und $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ haben auf diesem Zustandsraum I die gleiche Bedeutung wie im diskreten Modell. Bevor weiter auf dieses Modell eingegangen wird, sei an die folgenden stochastischen Definitionen erinnert:

Definition 5

1. *Ein stochastischer Kern $\tilde{K}$ von Y nach X ist eine Funktion $\tilde{K}(.|.)$ f.d.g.:*

   (a) *$\tilde{K}(.|y)$ ist für jedes feste $y \in Y$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf X.*

   (b) *$\tilde{K}(B|.)$ ist für jedes feste $B \in \mathcal{B}(X)$ eine meßbare Funktion auf Y.*

2. *Ein stochastischer Kern $\tilde{K}$ auf X gegeben Y heißt schwach (bzw. stark) stetig, wenn die Funktion $\tilde{f}(y) := \int_X f(x)\tilde{K}(dx|y)$ stetig und beschränkt auf Y ist für alle stetigen (bzw. meßbaren) und beschränkten Funktionen f auf X.*

Um stochastische Aussagen über die Zustandsveränderung innerhalb eines Zeitintervalls treffen zu können, betrachte man den Wahrscheinlichkeitsraum $([0, N], \mathcal{B}_{[0,N]})$. Nun kann man einen stochastischen Kern $K : ([0, N], \mathcal{B}_{[0,N]}) \to [0, 1]$ folgendermaßen definieren: $K(x, B) = P(X_1^- \in B|X_0 = x)\ \forall x \in [0, N],\ \forall B \in \mathcal{B}_{[0,N]}$. K kann auch als *Übergangsgesetz* bezeichnet werden. Für $x \in [0, N]$ stelle $P_x : \mathcal{B}_{[0,N]} \to [0, 1]$ die folgende Übergangs-Wahrscheinlichkeitsfunktion dar: $P_x(B) := K(x, B) = P(X_1^- \in B|X_0 = x)$ für $B \in \mathcal{B}_{[0,N]}$. Wegen der Abnutzung der arbeitenden Maschine nimmt diese Funktion für $B = (0, x)$ den Wert 0 an. Des weiteren werde die Funktion $A : [0, N] \to \mathcal{B}_{[0,N]}$ definiert, die jedem Zustand x seine Aktionsmenge $A(x)$ zuordnet. In diesem Modell ist offensichtlich $A(x) = [0, x]$. Bevor Weiteres über die Funktion A gesagt wird, sei vorher an die Definition der *halbseitigen Stetigkeit von unten* (bzw. Halbstetigkeit von unten) aus der Analysis erinnert, die in diesem Kapitel eine nicht unerhebliche Rolle spielt:

Definition 6 *Es sei X ein metrischer Raum. Eine* **Funktion** $f : X \to I\!R$ *ist genau dann* **von unten halbseitig stetig**, *wenn eine der folgenden drei äquivalenten Bedingungen gilt:*

1. *Für jedes reelle c ist die Menge $\{x \in X | f(x) \leq c\}$ abgeschlossen.*

2. *Für jede gegen $x \in X$ konvergierende Folge $(x_n)_{n \in N} \subset X$ gilt:*

$$f(x) \leq \liminf_{n \to \infty} f(x_n).$$

3. *Es existiert eine Folge $(f_n) \subset C(X)$ mit $f_n \uparrow f$.*

Eine **Multi-Funktion** $h : X \to A$ $(h(x) \subset A)$ *ist genau dann* **von unten halbseitig stetig**, *wenn eine der drei folgenden äquivalenten Eigenschaften erfüllt ist:*

1. $h^{-1}(B) := \{x \in X : \ h(x) \cap B \neq \emptyset\}$ *ist offen für jede offene Menge B aus A.*

2. *Für jede abgeschlossene Menge F in A ist die Menge $\{x \in X | h(x) \subset F\}$ ebenfalls abgeschlossen.*

3. *Aus $x_n \to x$ in X und $a \in h(x)$ folgt die Existenz einer Folge $(a_n)_{n \in N}$ mit $a_n \in h(x_n)$, so daß $a_n \to a$ gilt.*

Die Äquivalenz der drei Eigenschaften einer Funktion $f : X \to I\!R$ ist u.a. in Bertsekas [5], Lemma 7.13(a) und 7.14 bewiesen, und der Beweis der Äquivalenz der drei Eigenschaften einer Multifunktion ist z.B. in Himmelberg et al [12], Theorem 3 zu finden. Aus der dritten Eigenschaft einer von unten halbseitig stetigen Funktion ergibt sich unmittelbar, daß aus der von unten halbseitigen Stetigkeit jeder Funktion f_n und $f_n \uparrow f$ für eine Funktion f die von unten halbseitige Stetigkeit von f folgt: $\exists (f_{n,k})_{(n,k) \in (Z\!\!\!Z^+)^2} \subset C(I\!R^+) : (f_{n,k})_{k \in N} \uparrow f_n \; \forall n \in Z\!\!\!Z^+$, wegen $C(I\!R^+) \supset (\max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \{f_{i,i}\})_{n \in Z\!\!\!Z^+} \uparrow f$ ist f somit von unten halbseitig stetig.

Definition 7 *Es sei d eine Metrik auf I und 2^I das System aller kompakten Teilmengen (ohne $\emptyset$) von I. Zunächst sei die Funktion d auf $I \times 2^I$ folgendermaßen erweitert:*

$$d(x, A) = \min_{\{a \in A\}} d(x, a) \quad \forall (x, A) \in I \times 2^I.$$

Die **Hausdorff-Metrik** ρ_d *auf 2^I sei folgendermaßen definiert:*

$$\rho_d(A, B) = \max \left\{ \max_{\{a \in A\}} d(a, B), \ \max_{\{b \in B\}} d(b, A) \right\} \quad \forall A, B \in 2^I.$$

Daß ρ_d eine Metrik ist, ist in Bertsekas [5], S.303 f. für den Fall bewiesen, daß 2^I das System aller abgeschlossenen Mengen eines kompakten metrischen Raumes ist. Für die hier definierte Menge 2^I ist der Beweis analog, da wegen der Kompaktheit der Elemente aus 2^I alle Maxima und Minima angenommen werden.

Lemma 16 *Die Multi-Funktion $A: \ (I,d) \to (2^I, \rho_d)$ mit $A(x) = [0,x]$ ist für jede Metrik d kompaktwertig und stetig.*

Da $A(x) = [0,x]$ für alle $x \in I$ kompakt ist, ist die Funktion A offensichtlich kompaktwertig und die Stetigkeit ergibt sich aus

$$\rho_d\left(A(x), A(y)\right) = \rho_d\left([0,x],[0,y]\right) = d(x,y). \quad \blacksquare$$

Lemma 17 *Es sei X ein metrischer Raum, und $f, g: \ X \to I\!R^+$ und $h: X \to X$ seien von unten halbseitig stetige Funktionen. Zudem sei $u: X^2 \to I\!R^+$ eine in der zweiten Komponente von unten halbseitig stetige Funktion. A sei die im letzten Lemma erwähnte Multi-Funktion. Dann gilt:*

1. *$f+g$ ist von unten halbseitig stetig.*
2. *$f \circ h$ ist von unten halbseitig stetig.*
3. *Die Funktion $v(x) := \min_{\{a \in A(x)\}} u(x,a)$ existiert und ist meßbar.*

Beweis: zu (1):

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \Rightarrow \quad \liminf_{n\to\infty} \left(f(x_n) + g(x_n)\right) \geq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) + \liminf_{n\to\infty} g(x_n) \geq f(x) + g(x).$$

(2) ist offensichtlich erfüllt, da $(f \circ h)^{-1}(M)$ für jede abgeschlossene Menge M abgeschlossen ist. Die Aussage (3) ist von Himmelberg et al [12] unter der Voraussetzung der Borell-Meßbarkeit von A, die sich aus der im letzten Lemma gezeigten Stetigkeit von A ergibt, in Theorem 2 bewiesen worden. $\blacksquare$

Die Verteilungsfunktion $F(.|x)$, $x \in I$ auf I sei nun folgendermaßen definiert:
$F(y|x) = P_x([0,y]) = P_x([x,y]) \quad \forall y \geq x.$ Wenn sie absolutstetig ist, sei $f(.|x)$ die zugehörige Dichte, so daß dann offensichtlich $F(y|x) = \int_0^y f(z|x)\,dz = \int_x^y f(z|x)\,dz$ gilt. Eine Strategie δ ist die überabzählbare Menge von Zufallsvariablen $\{\delta_n(x);\, x \in I,\, n \in I\!N\}$ mit Bildraum I, so daß die der Zufallsvariablen $\delta_n(x)$ zugehörigen Verteilungsfunktion $G_x^{\delta_n}(a) := P(\delta_n(x) \leq a)$ die Bedingung $G_x^{\delta_n}(a) = 1 \ \forall a \geq x$ erfüllt, und somit die Eigenschaft $\delta_n(x) \leq x \ \forall x \in I \ \forall n \in I\!N$ f.s. gilt. Π_2 sei der Raum all dieser Strategien. $\mu_x^{\delta_n}$ sei das der Verteilungsfunktion $G_x^{\delta_n}$ zugrunde liegende Maß. Sind für δ alle Maße $\mu_x^{\delta_n}$ Dirac-Maße, dann ist die Strategie δ deterministisch. Gilt für alle $x \in I$, daß die Folge von Maßen $(\mu_x^{\delta_n})_{n\in N}$ konstant ist, dann ist δ stationär. Ist die Strategie

δ deterministisch und stationär, dann wird δ als Funktion von I nach I interpretiert, bei der jeder Wert $x \in I$ auf den für alle $n \in I\!N$ identischen Dirac-Kern von $\delta_n(x)$ abgebildet wird. Letzlich sei noch die im diskreten Modell bereits erwähnte stationäre und deterministische bang-bang Strategie δ_∞ erwähnt, die fast sicher der identischen Abbildung auf I entspricht.
Die Situation im $n-$ten Zeitintervall sieht in diesem Modell so aus wie beim diskreten in Kapitel 1, mit den einzigen Unterschieden, daß i, j und a nun reellwertig sind und man statt den Übergangs-Wahrscheinlichkeiten eine Menge von Übergangswahrscheinlichkeitsfunktionen $\{F(.|x),\ x \in I\}$ auf I hat.

3.1 Der diskontierte Fall

Auch hier wird als erstes der diskontierte Fall betrachtet:
Zunächst werden analoge Beschränktheitsvoraussetzungen an die Kostenfunktionen, die hier meßbar sein sollen, gestellt. Diese Voraussetzungen werden hier ebenfalls Bedingung A genannt:
$\exists K_x \in I\!R,\ \kappa_x \in I\!N$:

$$\int_x^N \left(\sup_{\{0 \le x_1 \le y\}} \{|r(x_1)|\} + \sup_{\{0 \le x_3 \le x_2 \le y\}} \{|d(x_2, x_3)|\} \right) dF^{(n)}(y|x) < K_x n^{\kappa_x} \qquad \forall x \in I.$$

Hier sei $F^{(n)}(y|x) = P_{\delta_\infty}(X_n \le y\,|X_0 = x)$, so daß $F^{(1)}(y|x) = F(y|x)$ und $F^{(n)}(y|x) = \int_x^y F^{(n-1)}(y|z)\,dF(z|x)$ gilt.

Außerdem sei hier die folgende Verallgemeinerung der Dermanschen Bedingung erfüllt, die später als Voraussetzung (3) bezeichnet wird:

$$F(.|x) \text{ ist monoton nicht-wachsend für alle } x \in I.$$

Somit ist, wie im diskreten Fall, die Wahrscheinlichkeit $P(X_{n+1}^- \ge x|X_n = a)$ $= 1 - F(x|a)$ monoton nicht-fallend. Ebenfalls analog zum diskreten Fall gilt hier das

Lemma 18 $X_0^{\delta_\infty} = X_0^\delta \;\Rightarrow\; \left(X_n^{\delta_\infty} \overset{st}{\ge} X_n^\delta\ \forall n \in I\!N \text{ und } X_n^{\delta_\infty,-} \overset{st}{\ge} X_n^{\delta,-}\ \forall n \in I\!N \right).$

Beweis: Der Induktionsanfang ist identisch zu dem Beweis von Lemma 1. Dies trifft im wesentlichen auch auf den Induktionsschluß zu. Er sieht hier folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
P\left(X_{n+1}^{\delta_\infty,-} \ge y\right) &= \int_{x=0}^N P\left(X_{n+1}^{\delta_\infty,-} \ge y|X_n^{\delta_\infty} = x\right) dF\left(x|\,X_n^{\delta_\infty}\right) \\
&= \int_{x=0}^N (1 - F(y|x))\,dF\left(x|\,X_n^{\delta_\infty}\right) \\
&= E\left(f_y\left(X_n^{\delta_\infty}\right)\right) \text{ mit } f_y(x) := 1 - F(y|x) = P(X_1^- > y|X_0 = x) \\
&\overset{I.S.}{\ge} E\left(f_y\left(X_n^{\delta}\right)\right) \text{ da } f_y(x_1) > f_y(x_2) \text{ für } x_1 > x_2 \\
&= P\left(X_{n+1}^{\delta,-} \ge y\right). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

In 2.1 wurde schon die allgemeine Darstellung der Funktion von erwarteten diskontierten Kosten angegeben, die hier im Falle der Existenz die folgende Gestalt hat:

$$\begin{aligned} V_{\delta,\alpha}(x) &= E_\delta\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n c_\delta(n)\middle| X_0 = x\right) \text{ mit der abzählbaren Menge von Zufallsvariablen} \\ &\quad \{c_\delta(n),\ n\in I\!N\} \text{ mit } c_\delta(n) := r(X_n) + d(X_{n+1}^-, \delta(X_{n+1}^-)), \\ &= E_\delta\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\left(r(X_n) + \int_0^N\int_0^y d(y,a)\,dG_y^\delta(a)\,dF(y|X_n)\middle| X_0 = x\right)\right). \end{aligned}$$

$c_\delta(n)$ ist in diesem Modell von anderer Gestalt:

$$c_\delta(n) = r(X_n) + \int_x^N\int_0^y d(y,a)\ dG_y^\delta(a)\ dF(y|X_n) \quad \forall x\in I.$$

Als Integrationsbereich kann auch I^2 verwendet werden, da die Masse im restlichen Bereich verschwindet. Der folgende Satz sichert auch hier die Wohldefiniertheit von $V_{\delta,\alpha}$:

Satz 28 $|V_{\delta,\alpha}(x)| \le |r(x)| + \tilde{\kappa}_x^\alpha < \infty$ *mit* $\tilde{\kappa}_x^\alpha := K_x\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}(n+1)^{\kappa_x}$.

Beweis:

$$\begin{aligned} & |V_{\delta,\alpha}(x)| \\ \le\ & |r(x)| + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}E_\delta\left(\sup_{\{0\le x_3\le x_2\le X_n\}}\{|d(x_2,x_3)|\} + \sup_{\{0\le x_1\le X_n\}}\{|r(x_1)|\}\middle| X_0 = x\right) \\ \overset{\text{Lemma 18}}{\le}\ & |r(x)| + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}E_{\delta_\infty}\left(\sup_{\{0\le x_3\le x_2\le X_n\}}\{|d(x_2,x_3)|\} + \sup_{\{0\le x_1\le X_n\}}\{|r(x_1)|\}\middle| X_0 = x\right) \\ \le\ & |r(x)| + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}\int_x^N\left(\sup_{\{0\le x_3\le x_2\le y\}}\{|d(x_2,x_3)|\} + \sup_{\{0\le x_1\le y\}}\{|r(x_1)|\}\right)\ dF^{(n)}(y|x) \\ \le\ & |r(x)| + \kappa_x\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}(n+1)^{\kappa_i} = |r(x)| + \tilde{\kappa}_x^\alpha < \infty.\quad\blacksquare \end{aligned}$$

Schon an dieser Stelle werden weitere Voraussetzungen angegeben, die an dieses Modell gestellt werden:

(1) Die Kostenfunktion r ist nicht nur meßbar, sondern auch monoton nicht-fallend und linksstetig, und die Kostenfunktion d ist außer meßbar ebenfalls in beiden Komponenten monoton nicht-fallend und in der zweiten Komponente linksstetig.
(2) Die Funktion $x\to P_x(B)$ ist für jedes $B\in\mathcal{B}_{[0,N]}$ stetig in x auf I.

Auf Grund der Bedingung (1) sind d in der zweiten Komponente und r halbseitig von unten stetig. Die Klasse der halbseitig von unten stetigen Funktionen auf X wird i.f. mit $C_u(X)$ bezeichnet. Die Bedingung (2) ist zum Beispiel dann erfüllt, wenn jede Verteilungsfunktion $F(.|x)$ absolutstetig ist und die Familie $\{f(.|x),\ x\in I\}$ in dem

Parameter x bzgl. der L_1-Norm stetig ist, also für alle $x \in I$ und $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $\int_I |f(y|z) - f(y|x)|\, dy < \epsilon\ \forall z \in [x-\delta, x+\delta]$, da dann
$|P_z(B) - P_x(B)| \leq \int_B |f(y|z) - f(y|x)|\ dy < \epsilon\ \forall z \in [x-\delta, x+\delta]$ gilt.

Lemma 19 *Die Bedingung* (2) *ist äquivalent zur starken Stetigkeit des stochastischen Kerns K.*

Beweis: Ist der Kern stark stetig, ist $P_x(B) = \int 1_B dF(y|x)$ für alle $B \in \mathcal{B}$ stetig in x.
Die Rückrichtung wird durch maßtheoretische Induktion bewiesen:
(i) $h = \sum_{i=1}^n c_i 1_{B_i}$ mit $c_i \in I\!R^+$ und $B_i \in \mathcal{B}$: $\int h\ dF(y|x) = \sum_{i=1}^n c_i \int 1_{B_i}\, dF(y|x)$
$= \sum_{i=1}^n c_i P_x(B_i)$ stetig in x und nach oben beschränkt durch $\max_{i\in\{1,\ldots,n\}}\{c_i\}$.
(ii) h meßbar, beschränkt und positiv: Es existiert eine Folge $(h_n)_{n\in N}$ mit $h_n \uparrow h$, h_n von der Gestalt aus (i) und $||h - h_n||_\infty < \frac{1}{n}$. Daraus folgt:
$\int h\ dF(y|x) = \int \lim_{n\to\infty} h_n\, dF(y|x) = \lim_{n\to\infty} \int h_n\, dF(y|x)$ als Grenzfunktion stetiger und beschränkter Funktionen stetig und beschränkt wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Integralfolge:
$|| \int h(y)\ dF(y|x) - \int h_n(y)\ dF(y|x)||_\infty = \int ||h(y) - h_n(y)||_\infty\ dF(y|x) < \frac{1}{n}$.
(iii) h meßbar und beschränkt: $h = h^+ - h^-$ mit h^+ und h^- von der Gestalt aus (ii) ist somit ebenfalls stetig und beschränkt. ■

Durch Addition der Kostenfunktionen mit der Konstanten $K_0 := \max\{-r(0), -d(0,0), 0\}$ erhält man nicht-negative Kostenfunktionen, so daß es in der weiteren Behandlung dieses Modells genügt, nicht-negative Kostenfunktionen zu betrachten. Die mit den neuen Kostenfunktionen ermittelte Wertfunktion $\tilde{V}_{\delta,\alpha}$ ist abschließend lediglich mit der Konstanten $\frac{2K_0}{1-\alpha}$ zu subtrahieren, um die Wertfunktion der ursprünglichen Kostenfunktionen $V_{\delta,\alpha}$ zu erhalten.

$\mathcal{M}(X)$ sei die Menge der meßbaren Funktionen auf X und $\mathcal{M}_b(X)$ die Teilmenge der beschränkten Funktionen von $\mathcal{M}(X)$. Da in diesem Modell die Kostenfunktionen auch nach oben unbeschränkt sein können, wird für den nächsten Satz das folgende Lemma benötigt:

Lemma 20 *Die Funktion $h(x) := \int g(y)\ dF(y|x)$ auf I ist nach unten halbseitig stetig für jede Funktion $g \in \{\tilde{g} : I \to I\!R^+$ meßbar, $\tilde{g}(y)f(y|x)$ für jedes $x \in I$ integrierbar in y auf $I\}$.*

Beweis: Es seien für $n \in I\!N$ $g_n(y) = \min\{g(y), n\}$ und $h_n(x) = \int g_n(x,y)\ dF(y|x)$. Wegen der starken Stetigkeit des stochastischen Kerns K übertragen sich die Eigenschaften der Beschränktheit und Meßbarkeit von g_n auf die Eigenschaften der Beschränktheit und Stetigkeit von h_n. Aus $g_n \uparrow g$ folgt für jedes feste $x \in I$ $g_n \cdot f(.|x) \uparrow g \cdot f(.|x)$, so daß die Integrierbarkeit von $g \cdot f(.|x)$ schließlich $h_n(x) \uparrow h(x)$ ergibt. Die Stetigkeit aller h_n ergibt letztlich die von unten halbseitige Stetigkeit von h. ■

Satz 29 *Unter den bisher gemachten Voraussetzungen ist die folgende* **Meßbarkeitsbedingung** *dieses Modells erfüllt:*
Die folgenden Funktionen sind meßbar, und die Existenz des folgenden Minimums ist gesichert:

1. $\min_{\{a\in[0,x]\}}\{d(x,a)+V_\alpha(x-a)\}$ *mit* $V_\alpha(x):=\inf_{\{\delta\in\Pi_2\}}V_{\delta,\alpha}(x)$.

2. $d(x,\delta(x))+V_{\delta,\alpha}(x-\delta(x))\ \forall\delta\in\Pi_2$.

3. $f_\alpha:\ I\to I$, *f.d.g.:*
   $d(x,f_\alpha(x))+V_\alpha(x-f_\alpha(x))=\min_{\{a\in[0,x]\}}\{d(x,a)+V_\alpha(x-a)\}$.

Außerdem sind die Funktionen V_α *und* $V_{\delta,\alpha}$ *für alle* $\delta\in\Pi_2$ *von unten halbseitig stetig.*

Die in 3. eingeführte Funktion f_α kann somit mit einer stationären deterministischen Strategie identifiziert werden.

Beweis: Es seien $V_{\delta,\alpha}^{(n)}(x)$ die $\alpha-$diskontierten Kosten bis zum Zeitpunkt n unter der Strategie δ, also $V_{\delta,\alpha}^{(n)}(x)=E_\delta\left(\sum_{t=0}^n c_\delta(t)|\,X_0=x\right)$ und $V_\alpha^{(n)}(x)=\inf_{\{\delta\in\Pi_2\}}V_{\delta,\alpha}^{(n)}(x)$. Genauso wie die Bedingung A am Anfang des Kapitels die Existenz der Funktionen $V_{\delta,\alpha}$ garantiert, garantiert sie natürlich auch die Existenz der Funktionen $V_{\delta,\alpha}^{(n)}$. Für ein System mit endlichem Horizont erhält man durch vollständige Induktion über $n\in I\!N$ die folgenden Resultate:

$$
\begin{array}{rl}
(I) & y\to\min\limits_{a\in[0,y]}\left\{d(y,a)+\alpha V_\alpha^{(n)}(y-a)\right\} \text{ existiert und ist meßbar.}\\
(II) & V_\alpha^{(0)}(x)\equiv 0 \text{ und}\\
 & V_\alpha^{(n)}(x)=r(x)+\displaystyle\int\min_{a\in[0,y]}\left\{d(y,a)+\alpha V_\alpha^{(n-1)}(y-a)\right\}dF(y|x)\ \forall n\in I\!N.\\
(III) & V_\alpha^{(n)} \text{ ist von unten halbseitig stetig.}
\end{array}
$$

Beim Induktionsanfang ($n=0$) ist (I) erfüllt, da nach Lemma 17 $\min_{\{a\in[0,y]\}}d(y,a)$ existiert und meßbar ist. Die Aussagen von (II) und (III) sind offensichtlich erfüllt. Nun wird der Induktionsschluß von $n-1$ nach n als erstes für den Teil (II) gezeigt:

$$
\begin{aligned}
V_{\delta,\alpha}^{(n)}(x) &= r(x)+\int_x^N\int_0^y d(y,\delta(y))+\alpha V_{\delta,\alpha}^{(n-1)}(y-\delta(y))dG_y^\delta(a)dF(y|x)\\
&\geq r(x)+\int_x^N\min_{a\in[0,y]}\{d(y,a)+\alpha V_\alpha^{(n-1)}(y-a)\}dF(y|x)\quad\forall\delta\in\Pi_2\\
\Rightarrow V_\alpha^{(n)}(x) &\geq r(x)+\int_x^N\min_{a\in[0,y]}\{d(y,a)+\alpha V_\alpha^{(n-1)}(y-a)\}dF(y|x).
\end{aligned}
$$

Die Bildung und Integration des Minimums in der zweiten Zeile ist nach dem Teil (I) der Induktionsvoraussetzung möglich. Nun sei δ_ϵ die Strategie, die sich bis zum Zeitpunkt $n-1$ so verhält, daß $V_{\delta_\epsilon,\alpha}^{(n-1)}(x)\leq V_\alpha^{(n-1)}(x)+\epsilon\ \forall x\in I$ gilt und die im $n-$ten

Schritt im Zustand y eine Aktion a_0 wählt mit
$d(y,a_0)+\alpha V_\alpha^{(n-1)}(y-a_0)=\min_{\{a\in[0,y]\}}\left\{d(y,a)+\alpha V_\alpha^{(n-1)}(y-a)\right\}$:

$$\begin{aligned}
V_{\delta_\epsilon,\alpha}^{(n)}(x) &= r(x)+\int_x^N \left(d(y,\delta_\epsilon(y))+\alpha V_{\delta_\epsilon,\alpha}^{(n-1)}(y-\delta_\epsilon(y))\right)dF(y|x)\\
&\le r(x)+\int_x^N \left(d(y,\delta_\epsilon(y))+\alpha V_\alpha^{(n-1)}(y-\delta_\epsilon(y)\right)dF(y|x)+\alpha\epsilon\\
&= r(x)+\int_x^N \min_{a\in[0,y]}\left\{d(y,a)+\alpha V_\alpha^{(n-1)}(y-a)\right\}dF(y|x)+\alpha\epsilon\\
\Rightarrow V_\alpha^{(n)}(x) &\le \lim_{\epsilon\downarrow 0} V_{\delta_\epsilon,\alpha}^{(n)}(x)\le r(x)+\int \min_{a\in[0,y]}\{d(y,a)+\alpha V_\alpha^{(n-1)}(y-a)\}dF(y|x).
\end{aligned}$$

Beide Ungleichungen sorgen dafür, daß Teil (II) bewiesen ist. Wegen der Stetigkeit von $F(y|.)$ für jedes $y\in I$ und somit der starken Stetigkeit des stochastischen Kerns K ist das gesamte Integral von Aussage (II) nach dem letzten Lemma und der Aussage (I) der Induktionsvoraussetzung von unten halbseitig stetig. Die Aussage (III) folgt somit aus der Stetigkeit von unten von r. Aussage (I) letztlich läßt sich direkt aus der Aussage (III) herleiten:
Es sei $h: I^2\to I$ stetig mit $h(x,a)=x-a$. Dann ist nach der Induktionsvoraussetzung, der Aussage (III) und den Teilen (1) und (2) des Lemmas 17 auch die Funktion $u(y,a):=d(y,a)+\alpha V_\alpha^{(n)}(y-a)=d(y,a)+(V_\alpha^{(n)}\circ h)(y,a))$ von unten halbseitig stetig, und nach Teil (3) dieses Lemmas existiert $\min_{\{a\in A(y)\}}u(y,a)$ und ist meßbar. Somit ist auch die Aussage (I) gezeigt und die vollständige Induktion gelungen. Wegen $V_\alpha^{(n)}(x)\uparrow V_\alpha(x)$ ist V_α ebenfalls von unten halbseitig stetig. Also existiert mit der gleichen Argumentation wie bei dem Beweis von Aussage (I) in der Induktion auch die Funktion $\min_{\{a\in[0,y]\}}\{d(y,a)+\alpha V_\alpha(y-a)\}$ und ist meßbar. Die Meßbarkeit von f_α ist ebenfalls von Himmelberg et al [12] bewiesen. Die hier benutzten Aussagen von Himmelberg et al sind ebenfalls von Hernandez-Lerma, Lasserre [10] als Proposition D.5 formuliert.
Die Meßbarkeit von $d(x,\delta(x))+V_{\delta,\alpha}(x-\delta(x))$ in x folgt aus der Meßbarkeit von d, δ und $V_{\delta,\alpha}$. Die Stetigkeit von unten von $V_{\delta,\alpha}$ wiederum ergibt sich aus $V_{\delta,\alpha}^{(n)}(x)\uparrow V_{\delta,\alpha}(x)$ und der Stetigkeit von unten von $V_{\delta,\alpha}^{(n)}(x)$ für alle $n\in\mathbb{N}$, die sich durch eine analoge vollständige Induktion aus dem rekursiven Gleichungssystem $V_{\delta,\alpha}(0)\equiv 0$ und

$$V_{\delta,\alpha}^{(n)}(x)=r(x)+\int_x^N\int_0^y \left(d(y,a)+\alpha V_{\delta,\alpha}^{(n-1)}(y-a)\right)\,dG_y^\delta(a)\,dF(y|x)\;\forall n\in\mathbb{N}$$

herleiten läßt. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Als nächstes ergibt hier das Prinzip der dynamischen Programmierung die folgende Funktionalgleichung:

$$V_{\delta,\alpha}(x)=r(x)+\int_x^N\int_0^y (d(y,a)+\alpha V_{\delta,\alpha}(y-a))\,dG_y^\delta(a)dF(y|x).$$

Ist die Politik δ deterministisch, gilt:

$$V_{\delta,\alpha}(x) = r(x) + \int_x^N (d(y,\delta(y)) + \alpha V_{\delta,\alpha}(y-\delta(y),\alpha))\, dF(y|x).$$

Als nächstes wird die **Optimalitätsgleichung** dieses Modells angegeben:

Satz 30 *Die optimale Wertfunktion $V_\alpha(x)$ hat die folgende Darstellung:*

$$V_\alpha(x) = r(x) + \int_{y=x}^N \min_{a\in[0,y]} \{d(y,a) + \alpha V_\alpha(y-a)\}\, dF(y|x).$$

Ähnlich wie im diskreten Fall wird genauso wie beim Induktionsbeweis der Aussage (II) im Satz 29 der **Beweis** über zwei Ungleichungen geführt:
(1): Diese Ungleichung wird ausgehend von der gerade aufgestellten Funktionalgleichung bewiesen:

$$\begin{aligned} V_{\delta,\alpha}(x) &= r(x) + \int_x^N \int_0^y (d(y,a) + \alpha V_{\delta,\alpha}(y-a))\, dG_y^\delta(a) dF(y|x) \\ &\geq r(x) + \int_x^N \min_{a\in[0,y]} \{d(y,a) + \alpha V_\alpha(y-a)\}\, dF(y|x) \quad \forall \delta \in \Pi_2. \\ \text{Daher ist auch } V_\alpha(x) &\geq r(x) + \int_x^N \min_{a\in[0,y]} \{d(y,a) + \alpha V_\alpha(y-a)\}\, dF(y|x). \end{aligned}$$

(2) Es sei $\epsilon > 0$ gegeben. Für alle nicht-negativen reellen Zahlen x sei ein ebenfalls nicht-negatives reelles $a_0(x)$ so definiert, daß

$$d(x,a_0(x)) + \alpha V_\alpha(x-a_0(x)) = \min_{a\in[0,x]} \{d(x,a) + \alpha V_\alpha(x-a)\} \quad \text{gilt.}$$

Nun sei δ die Strategie, die nach der ersten Inspektion im Zustand $y \in I$ die Aktion $a_0(x)$ wählt, und ab dem Zeitpunkt 2 zu der existierenden Strategie δ_ϵ identisch ist, die für alle x aus I der Ungleichung $V_{\delta_\epsilon,\alpha}(x) \leq V_\alpha(x) + \epsilon$ genügt. Nun gilt:

$$\begin{aligned} V_\alpha(x) &\leq V_{\delta,\alpha}(x) \\ &= r(x) + \int_x^N (d(y,a_0(y)) + \alpha V_{\delta_\epsilon,\alpha}(y-a_0(y)))\, dF(y|x) \\ &\leq r(x) + \int_x^N (d(y,a_0(y)) + \alpha V_\alpha(y-a_0(y)) + \alpha\epsilon)\, dF(y|x) \\ &= r(x) + \int_x^N \left(\min_{a\in[0,y]} \{d(y,a) + \alpha V_\alpha(y-a)\} \right) dF(y|x) + \alpha\epsilon. \end{aligned}$$

Der Grenzübergang $\epsilon \downarrow 0$ liefert $V_\alpha(x) \leq r(x) + \int_x^N \min_{a\in[0,y]} \{d(y,a) + \alpha V_\alpha(y-a)\}\, dF(y|x)$.

Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. ∎

Definition 8 *Die Operatoren $T_{\delta,\alpha} : \mathcal{M}(I) \to C_u(I)$ und $T_\alpha : C_u(I) \to C_u(I)$ seien für eine deterministische stationäre Strategie δ folgendermaßen definiert:*

$$\begin{aligned} (T_{\delta,\alpha}(u))(x) &:= r(x) + \int_x^N (d(y,\delta(y)) + \alpha u(y-\delta(y)))\, dF(y|x). \\ (T_\alpha(u))(x) &:= r(x) + \int_x^N \min_{a\in[0,y]} \{d(y,a) + \alpha u(y-a)\}\, dF(y|x). \end{aligned}$$

Zunächst wird die Wohldefiniertheit des Operators $T_{\delta,\alpha}$ betrachtet: Da d, u und f meßbare Funktionen sind, trifft die Eigenschaft der Meßbarkeit auch auf die Funktion $v^\delta(y) := d(y,\delta(y)) + \alpha u(y-\delta(y))$ zu. Somit gibt es eine Folge $(v_n^\delta)_{n\in N} \subset \mathcal{M}_b(I)$ mit $v_n^\delta \uparrow v^\delta$. Für jedes $n \in I\!N$ ist $\int_x^N v_n^\delta(y)\, dF(y|x)$ stetig und beschränkt in x. Eine erneute Anwendung des Satzes von Beppo Levy ergibt, daß $\int_x^N v^\delta(y)\, dF(y|x) = \lim_{n\to\infty} \int_x^N v_n^\delta(y)\, dF(y|x)$ wegen der Konvergenz von unten halbseitig von unten stetig ist. Damit ist auch die Bildfunktion des Operators $T_{\delta,\alpha}$ halbseitig von unten stetig, also erst recht meßbar. Die Existenz und Meßbarkeit des Minimums von T_α garantiert Lemma 17 (1) und (3), so daß auch T_α wohldefiniert ist.

Nun wird für dieses Modell die entsprechende Bedingung B formuliert, die ebenfalls im Gegensatz zur Bedingung A nur dann gelten soll, wenn dies explizit erwähnt wird.

Bedingung B: $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n \int_{y=x}^N \left(\sup\limits_{z\in[0,y]} \{|r(z)| + \tilde{\kappa}_z^\alpha\} \right) \, dF_x^{(n)}(y) = 0.$

Analog zum diskreten Modell lassen sich die beiden folgenden Lemmata beweisen. Allerdings muß im ersten Teil des folgenden Lemmas kurz auf den Fall $N < \infty$ geschaut werden, da er hier nicht automatisch Kostenbeschränktheit impliziert: Die Folgen $(K_x)_{x\in I}$, $(\kappa_x)_{x\in I}$ und damit auch $(\tilde{\kappa}_x^\alpha)_{x\in I}$ können offensichtlich monoton nichtfallend gewählt werden, so daß in der Bedingung B jedes $\tilde{\kappa}_x^\alpha$ durch $\tilde{\kappa}_N^\alpha$ abgeschätzt werden kann. Somit existiert der Integrand in der Bedingung B, und der Grenzwert 0 ist offensichtlich.

Lemma 21

1. *Wenn die Kostenfunktionen beschränkt sind oder $N < \infty$ gilt, gibt es Folgen $(K_x)_{x\in I}$ und $(\kappa_x)_{x\in I}$, so daß bzgl. der entsprechenden Folge $(\tilde{\kappa}_x^\alpha)$ die Bedingung B erfüllt ist.*

2. *Aus Bedingung B folgt $\lim_{n\to\infty} \alpha^n E\left(V_{\delta,\alpha}(X_n^\delta)\middle| X_0 = i\right) = 0\ \forall x \in I\ \forall \delta \in \Pi_2$.*

Lemma 22 *Man betrachte die Strategie δ_α, die durch die folgende Gleichung und die Strategie $\delta_{\epsilon,\alpha}$, die durch die folgende Ungleichung definiert ist:*

$$\begin{aligned} d(x,\delta_\alpha(x)) + \alpha V_\alpha(x-\delta_\alpha(x)) &= \min_{a\in[0,x]} \{d(x,a) + \alpha V_\alpha(x-a)\} \quad \forall x \in I, \\ d(x,\delta_{\epsilon,\alpha}(x)) + \alpha V_\alpha(x-\delta_{\epsilon,\alpha}(x)) &\le \min_{a\in[0,x]} \{d(x,a) + \alpha V_\alpha(x-a)\} + \epsilon \quad \forall x \in I. \end{aligned}$$

Für diese Strategien gilt das Folgende:

$$\begin{aligned} &(1) \quad V_\alpha(x) = V_{\delta_\alpha,\alpha}^{(n)}(x) + \alpha^n E_{\delta_\alpha}\left(V_\alpha(X_n)\middle| X_0 = x\right) \quad \forall n \in I\!N, \\ &(2) \quad V_{\delta_{\epsilon,\alpha},\alpha}^{(n)}(x) \le V_\alpha(x) - \alpha^n E_{\delta_{\epsilon,\alpha}}\left(V_\alpha(X_n)\middle| X_0 = x\right) + \frac{\epsilon}{1-\alpha} \quad \forall n \in I\!N. \end{aligned}$$

Die Funktionen ϵ_k, die im Beweis von Lemma 4 verwendet wurden, werden hier natürlich auf diesen überabzählbaren Zustandsraum I definiert. Der Grenzübergang $n \to \infty$ dieser Aussagen liefert unter Verwendung des zweiten Teils von Lemma 21 den folgenden Existenzsatz:

Satz 31 über die Existenz der optimalen Strategie

1. *Sei δ_α die stationäre deterministische Strategie, so daß*

$$d(x, \delta_\alpha(x) + \alpha V_\alpha(x - \delta_\alpha(x)) = \min_{a \in [0,x]} \{d(x,a) + \alpha V_\alpha(x-a)\} \quad \forall x \in I.$$

Dann gilt unter der zusätzlichen Voraussetzung B $V_{\delta_\alpha,\alpha}(x) = V_\alpha(x) \quad \forall x \in I$, also $V_{\delta_\alpha,\alpha} = V_\alpha$, d.h. δ_α ist optimal.

2. *Es sei $\delta_{\epsilon,\alpha}$ eine stationäre und deterministische Strategie, die die folgende Ungleichung erfüllt:*

$$d(x, \delta_{\epsilon,\alpha}(x) + \alpha V_\alpha(x - \delta_\alpha(x)) \leq \min_{a \in [0,x]} \{d(x,a) + \alpha V_\alpha(x-a)\} + \epsilon \quad \forall x \in I.$$

Dann gilt $V_{\delta_{\epsilon,\alpha},\alpha} \leq V_\alpha + \dfrac{\epsilon}{1-\alpha}$, also $\lim\limits_{\epsilon \downarrow 0} V_{\delta_{\epsilon,\alpha},\alpha} = V_\alpha \; \forall \alpha \in (0,1)$.

Lemma 23 *Es gilt für alle $u \in C_u(I)$:*
(a) $u \geq T_\alpha u$

$$\text{und } \left(\lim_{n \to \infty} \alpha^n E_\delta(u(X_n) \mid X_0 = x) = 0 \; \forall x \in I \; \forall \delta \in \Pi_2 \text{ oder } u \geq 0 \right) \Rightarrow u \geq V_\alpha.$$

(b) $u \leq T_\alpha u$ und $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha^n E_\delta(u(X_n) \mid X_0 = x) = 0 \quad \forall x \in I \; \forall \delta \in \Pi_2 \qquad \Rightarrow u \leq V_\alpha$.

Beweis: Für $u \in C_u(I)$ sei hier $\delta_u(y)$ für $y \in I$ der Wert a aus $[0, y]$, der die Funktion $d(y,a) + \alpha u(y - z)$ minimiert. Dann gilt

$$T_\alpha u(x) = r(x) + \int_{y=x}^{N} (d(y, \delta_u(y)) + \alpha u(y - \delta_u(y)))\, dF_x(y).$$

Die gleiche Beweisführung wie im diskreten Fall (Lemma 6) ergibt für (a):

$$u(x) \geq T_\alpha u(x) \Rightarrow ... \Rightarrow u(x) \geq V_{\delta_u,\alpha}(x) \geq V_\alpha(x) \quad \forall x \in I.$$

$$\begin{aligned}
(b): \quad & E_\delta \left(\alpha^{n+1} u(X_{n+1}) \middle| X_n, X_0 = i \right) = \alpha^{n+1} \int_{y=X_n}^{N} \int_{a=0}^{y} u(y-a) dG_y^\delta(a) dF(y|x) \\
= \quad & \alpha^n \Bigg[E_\delta \left(c_\delta(n) \middle| X_n, X_0 = x \right) + \alpha \int_{y=X_n}^{N} \int_{a=0}^{y} u(y-a) dG_y^\delta(a) dF(y|x) \\
& -E_\delta \left(c_\delta(n) \middle| X_n, X_0 = x \right) \Bigg]
\end{aligned}$$

$$= \alpha^n \left[r(X_n) + \int_{y=X_n}^{N} \int_{a=0}^{y} (d(y,a) + \alpha u(y-a))\, dG_y^\delta(a) dF(y|x) - E_\delta \left(c_\delta(n) \middle| X_n, X_0 = x \right) \right]$$

$= \alpha^n \left[T_\alpha u(X_n) - E_\delta\left(c_\delta(n)|\, X_n, X_0 = x\right)\right] \geq \alpha^n \left[u(X_n) - E\left(c_\delta(n)\right)|\, X_n, X_0 = x\right)\right].$

Aus dieser Ungleichung folgt die Aussage (b) identisch zu dem Beweis von Lemma 6(b). Somit ist auch der Teil (b) gezeigt. ■

Da $V_\delta \in C_u(I)$ für alle $\delta \in \Pi_2$ ist, führen dieses Lemma und der zweite Teil von Lemma 21 unmittelbar zu dem

Satz 32 *Unter der zusätzlichen Bedingung B ist V_α die einzige Funktion von I nach $\mathbb{R}$, die der Optimalitätsgleichung genügt.*

Genauso wie beim diskreten Modell kann dieser Satz bei beschränkten Kostenfunktionen auch unter Einsatz des Operators T_α bewiesen werden. Der Nachweis der Kontraktion von T_α ist ebenfalls analog, so daß dies hier nicht explizit ausgeführt wird.

Die Politik-Iteration sieht hier folgendermaßen aus:
Gegeben sei eine stationäre Strategie δ^0. Man wähle induktiv δ^n, so daß gilt:

$$d(x, \delta^n(x)) + \alpha V_{\delta^{n-1},\alpha}(x - \delta^n(x)) = \min_{a\in[0,x]} \left\{d(x,a) + \alpha V_{\delta^{n-1},\alpha}(x-a)\right\}.$$

Analog zum diskreten Modell gilt der

Satz 33 *Unter der Bedingung B gilt* $\lim_{n\to\infty} V_{\delta_n,\alpha}(x) = V_\alpha(x)\ \forall x \in I$, *die Folge* $(\delta_n)_{n=1}^\infty$ *konvergiert somit gegen die $\alpha-$optimale Strategie.*

Definition 9 *$W_{\delta,\alpha}(x)$ gebe die $\alpha-$diskontierten Kosten unter der Strategie δ an, wenn der Prozeß mit einer Reparatur beginnt. Außerdem sei $W_\alpha(x) := \inf_{\{\delta\in\Pi_2\}} W_{\delta,\alpha}(x)$.*
Der Operator $\tilde{T} :\ C_u(I) \to C_u(I)$ sei wie folgt definiert:

$$(\tilde{T}_\alpha(u))(x) = \min_{a\in[0,x]} \left\{ d(x,a) + \alpha \int_{y=0}^N (r(y) + u(y)) dF(y|x-a) \right\}.$$

Die Funktion $W_\alpha : I \to \mathbb{R}$ gebe in Abhängigkeit vom Zustand beim Systemanfang die Funktion der optimalen erwarteten diskontierten Kosten an, wenn das System mit einer Reparatur beginnt.

Mit Hilfe von $\tilde{T}_\alpha$ kann nun genauso gezeigt werden, daß die folgende Politik-Iteration zur Berechnung der optimalen Strategie verwendet werden kann. Dieses wird hier aber nicht ausgeführt:

$\tilde{\delta}_0$ sei eine beliebige stationäre Strategie. Man wähle induktiv $\tilde{\delta}_n$, so daß gilt:

$$\begin{aligned} & d(x, \tilde{\delta}_n(x)) + \alpha \int_{y=0}^N \left(r(y) + W_{\tilde{\delta}_{n-1}}(y)\right)\ dF(y|x - \tilde{\delta}_n(x)) \\ = \quad & \min_{a\in[0,x]} \left\{ d(x,a) + \alpha \int_{y=0}^N \left(r(y) + W_{\delta_{n-1}}(y)\right)\ dF(y|x-a) \right\}. \end{aligned}$$

Satz 34

$$W_\alpha(x) = \min_{a\in[0,x]} \left\{ d(x,a) + \alpha \left(r(x-a) + \int_{y=x-a}^{N} W_\alpha(y)\, dF(y|x-a) \right) \right\}.$$

Korollar 8 *Zwischen den Funktionen V_α und W_α gelten die folgenden Beziehungen:*

$$\begin{aligned} W_\alpha(x) &= \min_{a\in[0,x]} \{d(x,a) + \alpha V_\alpha(x-a)\}, \\ V_\alpha(x) &= r(x) + \int_{y=x}^{N} W_\alpha(y)\, dF(y|x). \end{aligned}$$

Damit sind die zum diskreten Fall analogen Überlegungen zunächst beendet. Um Aussagen über optimale Strategien treffen zu können, wird vorweg die folgende analytische Überlegung angestellt:

Lemma 24 *Die Funktion $g: I \to I\!R$ sei monoton wachsend. Dann gibt es eine Folge von monoton nicht-fallenden Treppenfunktionen der Gestalt*

$$g_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{\infty} 1_{[(a_{k,n},N]} + \beta \text{ mit } [(a_{k,n},N] := \left\{ x \in I\!R \middle| g(x) \in \left[g(0) + \frac{k}{2^n}, N \right] \right\} \text{ und}$$

$\beta \in I\!R$, so daß gilt: Die Folge der g_n konvergiert gleichmäßig und monoton nicht-fallend gegen g. Ist g beschränkt, sind für jedes g_n nur endlich viele Summanden ungleich 0; ist g nicht-negativ, trifft dies auch auf β zu.

Beweis: Es sei $\beta = g(0)$ und somit $g_n(x) = g(0) + \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{g(x)-g(0)\geq \frac{k}{2^n}\}}(x)\ \forall x \in I$. Wegen der Monotonie von g ist die Menge

$$\{x \in I | g(x) - g(0) \geq \frac{k}{2^n}\} = \{x \in I | g(x) \in [g(0) + \frac{k}{2^n}, N]\}$$

ein nach oben nicht weiter eingeschränktes Intervall. Dies werde mit $[(a_{k,n}, \infty)$ bezeichnet, da es nach unten sowohl offen als auch abgeschlossen sein kann. g_n ist eine Treppenfunktion mit positiver, konstanter Treppendifferenz $\frac{1}{2^n}$ und daher monoton nicht-fallend. Sie nimmt genau dort den Wert $\frac{k}{2^n}$ an, wo g Werte aus $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$ annimmt. Somit überträgt sich die Monotonie von g auf f_n. Abschließend wird noch die gleichmäßige Konvergenz gegen die Grenzfunktion g gezeigt:

$$\forall x \in I,\ n \in I\!N\ \exists k_0 \in I\!N:\ g(x) \in \left[g(0) + \frac{k_0}{2^n}, g(0) + \frac{k_0+1}{2^n} \right).$$

Daraus ergibt sich folgende Implikation:

$$g_n(x) = g(0) + \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{k_0} 1 + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 0 = g(0) + \frac{k_0}{2^n} \Rightarrow g(x) - g_n(x) \in [0, \frac{1}{2^n}) \Rightarrow ||g - g_n||_\infty < \frac{1}{2^n}.$$

Ist g beschränkt, gibt es für alle $n \in I\!N$ ein $k_n \in I\!N$: $[(a_{k,n}, N] = \emptyset\, \forall k > k_n$, so daß alle Summanden nach dem $l > k_n$-ten verschwinden. Somit kann in der Darstellung von g_n der Ausdruck $\sum_{k=1}^{\infty}$ durch den Ausdruck $\sum_{k=1}^{k_n}$ ausgetauscht werden. ■

Diese Aussage wird nun benötigt beim Beweis des Folgenden:

Lemma 25 *$F(a|x)$ ist genau dann für alle $a \in I$ in $x \in I$ monoton nicht-wachsend, wenn die Funktion $\int_0^N g(y)\,dF(y|x)$ in $x \in I$ monoton nicht-fallend ist für alle monoton nicht-fallende Funktionen g auf I, für die das Integral $\int_0^N g(y)\,dF(y|x)$ existiert.*

Beweisrichtung '⇒': Aus dem letzten Lemma folgt für eine gegebene monoton nicht-fallende Funktion g, für die das Integral $\int_0^N g(y)\,dF(y|x)$ existiert:

$$\forall k,n \in I\!N\ \exists \alpha_{k,n} \in I\!R^+,\ \beta \in I\!R : g_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{\infty} 1_{[(a_{k,n}\infty)}(x) + \beta \text{ und } g_n \uparrow g.$$

Dies ergibt die folgende Identität:

$$\begin{aligned}
\int_0^N g(y)dF(y|x) &= \int_0^N \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=1}^{\infty} 1_{[(a_{k,n},\infty)}(y)+\beta\right) dF(y|x)\\
&= \int_I \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{\infty} 1_{[(a_{k,n},\infty)}(y)\right) dF(y|x)+\beta\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\int_I \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{\infty} 1_{[(a_{k,n},\infty)}(y)\,dF(y|x)+\beta\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{a_{k,n}}^{\infty} 1\,dF(y|x)+\beta\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{\infty}(1-F(a_{k,n}|x))+\beta.
\end{aligned}$$

Die dritte Gleichung gilt wegen $\int g_n\ dF(y|x) \leq \int g\ dF(y|x) < \infty$, und in der vierten Gleichung ist ebenfalls nach Beppo Levi die Vertauschung von Integration und Summation möglich, weil es keine negativen Terme gibt.
Nun sind nach Voraussetzung die Werte $F(a_{k,n}|x)$ in x monoton nicht-wachsend, die Werte $1 - F(a_{k,n}|x)$ also monoton nicht-fallend, und somit ist dieses auch die gesamte Summe.
Um die Beweisrichtung '⇐' zu zeigen, wähle $g := 1_{(a,\infty)}$. Dann ist $\int g\,dF(.|x) = P_x((a,\infty)) = 1 - F(a|x)$ monoton nicht-fallend in $x \in I$, $F(a|x)$ also monoton nicht-wachsend in $x \in I$. ■

Nun sind die Vorbereitungen für den folgenden wichtigen Satz fast abgeschlossen. Wiederholt wird noch einmal die Verallgemeinerung der Dermanschen Bedingung:

(3) $F(.|a)$ ist monoton nicht-wachsend für alle $a \in I$.

Die Bedingung (1) ist offensichtlich die Verallgemeinerung der Bedingungen (1) und (3) des Modells mit diskretem Zustandsraum. Daß die Bedingung (3) die Verallgemeinerung der diskreten Bedingung (2) ist, wurde schon gezeigt.

Satz 35 *V_α ist für alle $\alpha \in (0,1)$ monoton nicht-fallend auf I.*

Beweis: Ähnlich wie im Beweis von Satz 9 seien hier $\psi(x,\alpha,M)$ die diskontierten Kosten bis zum Zeitpunkt M unter Verwendung der optimalen Strategie, also $\psi(x,\alpha,M) = \inf_{\{\delta\in\Pi_2\}}\left\{V_{\delta,\alpha}^{(M)}(x)\right\}$. Nun wird durch vollständige Induktion nach M gezeigt, daß $\psi(x,\alpha,M)$ monoton nicht-fallend ist in x auf I für alle $\alpha\in(0,1)$, $M\in\mathbb{Z}^+$.
Zuerst sei $M=0$:
$\psi(x,\alpha,0)=r(x)$ und somit nach Voraussetzung (1) monoton nicht-fallend in $x\in I$.

$$M\to M{+}1:\ \psi(x,\alpha,M{+}1)=r(x)+\int_{y=0}^{N}\inf_{a\in[0,y]}\{d(y,a)+\alpha\psi(y-a,\alpha,M)\}dF(y|x).$$

Nun gilt:
Es sei ϵ eine beliebige reelle Zahl aus $[0,y]$. Dann ergibt sich die folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned}
&\inf_{a\in[0,y]}\{d(y,a)+\alpha\psi(y-a,\alpha,M)\}\\
&=\min\left\{\inf_{a\in[0,y]}\{d(y,a)+\alpha\psi(y-a,\alpha,M)\},\ \inf_{a\in[y-\epsilon,y]}\{d(y,a)+\alpha\psi(y-a,\alpha,M)\}\right\}\\
&\overset{\text{I.V.}}{\le}\min\left\{\inf_{a\in[0,y]}\{d(y+\epsilon,a)+\alpha\psi(y+\epsilon-a,\alpha,M)\},\right.\\
&\qquad\qquad\left.\inf_{a\in[y-\epsilon,y]}\{d(y+\epsilon,a+\epsilon)+\alpha\psi\alpha(y-a,\alpha,M)\}\right\}\\
&=\min\left\{\inf_{a\in[0,y]}\{d(y+\epsilon,a)+\alpha\psi(y+\epsilon-a,\alpha,M)\},\right.\\
&\qquad\qquad\left.\inf_{a\in[y,y+\epsilon]}\{d(y+\epsilon,a)+\alpha\psi(y+\epsilon-a,\alpha,M)\}\right\}\\
&=\inf_{a\in[0,y+\epsilon]}\{d(y{+}\epsilon,a)+\alpha\psi(y{+}\epsilon{-}a,\alpha,M)\}.
\end{aligned}$$

Nun kann das letzte Lemma mit $g(y)=\inf_{\{a\in[0,y]\}}\{d(y,a)+\alpha\psi(y-a,\alpha,M)\}$ angewendet werden. $\psi(x,\alpha,M+1)$ ist somit monoton nicht-fallend in x und der Induktionsschluß ist gelungen: $\psi(x,\alpha,M)$ ist monoton nicht-fallend für alle $M\in\mathbb{N}$. Wegen der punktweisen Konvergenz von $\psi(x,\alpha,M)$ gegen $V_\alpha(x)$ ist somit, genauso wie beim diskreten Modell, auch die Monotonie von V_α gezeigt. ■

Es ergibt sich direkt das folgende

Korollar 9

$$\int_0^N V_\alpha(y)\,dF(y|x)\ \uparrow(x).$$

Im folgenden Lemma und im anschließenden Satz wird sich mit der Differenzierbarkeit beschäftigt. Dabei wird vorausgesetzt, daß jede Verteilungsfunktion $F(.|x)$ absolutstetig ist und somit eine Dichte $f(.|x)$ hat.
Um bei einer Funktion auf $\mathbb{R}^2$ die Reihenfolge der Integration nach der einen Variablen

mit partieller Differentation nach der anderen Variablen vertauschen zu können, reicht auch im Gegensatz zu der in der Analysis üblichen Bedingung (siehe Heuser, Band 2 [11] Satz 128.2) die **lokale** Dominanz der Ableitungsfunktion durch eine integrierbare Funktion:

Lemma 26 *Es sei $h: I \times I \to \mathbb{R}^+$. Für jedes feste $x \in I$ sei $h(x,y)$ in y auf I integrierbar. Wenn für ein festes $y \in I$ $h(z,y)$ partiell nach z differenzierbar ist, diese partielle Ableitung stetig ist und es für alle $x \in I$ ein $\epsilon(x)$ und eine auf I integrierbare Funktion g_x gibt, so daß $\left|\frac{\partial}{\partial z}h(z,y)\right| \leq g_x(y) \quad \forall (z,y) \in ([x-\epsilon(x), x+\epsilon(x)]^+ \times I)$ gilt, dann folgt*

$$\frac{d}{dx}\int_I h(x,y)\,dy = \int_I \frac{\partial}{\partial x}h(x,y)\,dy \quad \forall x \in I.$$

Beweis: Es sei $x_0 \in I$ und $(x_n)_{n\in N} \subset (x_0-\epsilon(x_0), x_0) \cup (x_0, x_0+\epsilon(x_0))$ eine gegen x_0 konvergierende Folge. Außerdem sei $H(x) = \int h(x,y)\,dy$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es wegen der partiellen Differentation von h in der ersten Komponente für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $\chi_n \in [x_0, x_n] \cup [x_n, x_0]$ mit $\frac{\partial h}{\partial x}(\chi_n, y) = \frac{h(x_n)-h(x_0)}{x_n - x_0}$. Wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitung und wegen $x_n \to x_0$ und somit $\chi_n \to x_0$ ist $\lim_{n\to\infty}\frac{\partial h}{\partial x}(\chi_n, y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y)$. Da alle diese partiellen Ableitungen $\frac{\partial h}{\partial x}(\chi_n, y)$ und auch $\frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y)$ von der integrierbaren Funktion g_x dominiert werden, gilt nach dem Lebesgueschen Konvergenzsatz

$$\begin{aligned}\int_0^N \frac{\partial h}{\partial x}(x_0,y)\,dy &= \lim_{n\to\infty}\int_0^N \frac{\partial h}{\partial x}(\chi_n,y)\,dy = \lim_{n\to\infty}\int_0^N \frac{h(x_n,y)-h(x_0,y)}{x_n-x_0}\,dy \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{H(x_n)-H(x_0)}{x_n-x_0} = \left(\frac{d}{dx}\int_0^N h(x,y)dy\right)(x_0). \blacksquare\end{aligned}$$

Aus der Wahl $h(x,y) = f(y|x)\cdot 1_{(-\infty,a]}(y)$ für festes $a \in I$ ergibt sich das

Korollar 10 *Wenn $f(y|.)$ für alle $y \in I$ differenzierbar in I ist, es für alle $x \in I$ ein $\epsilon(x) > 0$ gibt, so daß $\tilde{g}_x(y) := \sup_{\{|z-x|<\epsilon(x)\}^+}\left|\frac{\partial f(y|z)}{\partial z}\right|$ integrierbar ist, dann ist auch für alle $y \in I$ $F(y|.): I \to [0,1]$ differenzierbar und $\frac{\partial F(a|x)}{\partial x} = \int_0^a \frac{\partial f(y|x)}{\partial x}\,dy\ \forall a \in I$.*

Satz 36 *Falls die Funktion $f(y|.)$ für jedes $y \in I$ auf I stetig differenzierbar ist und es für alle $x \in I$ ein $\epsilon(x) > 0$ gibt, so daß die Funktion $g_x(y) := \tilde{K}_y^\alpha \sup_{\{|z-x|<\epsilon(x)\}^+}\left\{\left|\frac{\partial f(y|z)}{\partial z}\right|\right\}$ integrierbar auf I ist und ebenfalls die Kostenfunktion r differenzierbar ist, dann ist auch die Funktion V_α für alle $\delta \in \Pi_2$ differenzierbar, und es gilt*

$$V_\alpha'(x_0) = r'(x_0) + \int_{x_0}^N \min_{a\in[0,y]}\{d(y,a)+\alpha V_\alpha(y-a)\}\,\frac{\partial f(y|x)}{\partial x}(x_0)\,dy.$$

Beweis: Genauso wie im Beweis von Satz 35 die Monotonie der Funktion $\inf_{a\in[0,y]}\{d(y,a)+\alpha\psi(y-a,\alpha,N)\}$ in y gezeigt wurde, läßt sich aus der Monotonie von

d und V_α die Monotonie der Funktion $\min_{a\in[0,z]}\{d(z,a)+\alpha V_\alpha(z-a)$ in z zeigen, so daß folgt:

$$\begin{aligned} V_\alpha(y) &= r(y) + \int \min_{a\in[0,z]}\{d(z,a)+\alpha V_\alpha(z-a)\}\, dF(z|y) \\ &\geq r(y) + \min_{a\in[0,y]}\{d(y,a)+\alpha V_\alpha(y-a)\}. \end{aligned}$$

Die Nicht-Negativität der Kosten ergibt

$$\min_{a\in[0,y]}\{d(y,a)+\alpha V_\alpha(y-a)\} \;\leq\; V_\alpha(y)-r(y) \leq V_\alpha(y) \leq \tilde{K}_y^\alpha.$$

Das letzte Lemma kann nun mit $h(z,y) := \min_{a\in[0,y]}\{d(y,a)+\alpha V_\alpha(y-a)\}f(y|z)$ und der im Satz definierten Funktion g_x angewendet werden, da für $z \in [x-\epsilon(x),\, x+\epsilon(x)]$ gilt:

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}h(z,y)\right| = \min_{a\in[0,y]}\{d(y,a)+\alpha V_\alpha(y-a)\}\left|\frac{\partial f(y|z)}{\partial z}\right| \leq \tilde{K}_y^\alpha \sup_{\{|z-x|<\epsilon(x)\}}\left\{\left|\frac{\partial f(y|z)}{\partial z}\right|\right\} = g_x(y).$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} V_\alpha'(x) &= r'(x) + \frac{d}{dx}\int_0^N \min_{a\in[0,y]}\{d(y,a)+\alpha V_\alpha(y-a)\}\, dF(y|x) \\ &= r'(x) + \int_0^N \min_{a\in[0,y]}\{d(y,a)+\alpha V_\alpha(y-a)\}\,\frac{\partial f(y|x)}{\partial x}\, dy. \end{aligned}$$

Die bang-bang Strategien

Definition 10 *Π_2^b ist die Klasse der bang-bang Strategien, also derjenigen stationären Strategien, für die $\delta(x)\in\{0,x\}$ gilt für alle $x\in I$. Auch hier sei*
$V_\alpha^b := \inf_{\{\delta\in\Pi_2^b\}} V_{\delta,\alpha}$.

Für die Funktion V_α^b gilt in diesem Modell das Folgende

Lemma 27

$$V_\alpha^b(x) = r(x) + \int_{y=x}^N \min\left\{d(y,0)+\alpha V_\alpha^b(y),\, d(y,y)+\alpha V_\alpha^b(0)\right\}\, dF(y|x).$$

Für $\delta_\alpha\in\Pi_2^b$ gilt unter der zusätzlichen Bedingung B die folgende Implikation: Wenn für alle $y\in I$ die folgende Identität erfüllt ist:

$$d(y,\delta_\alpha(y)) + \alpha V_\alpha^b(y-\delta_\alpha(y)) = \min\left\{d(y,0)+\alpha V_\alpha^b(y),\, d(y,y)+\alpha V_\alpha^b(0)\right\},$$

dann gilt $V_{\delta_\alpha,\alpha} = V_\alpha^b$.
Des weiteren ist V_α^b ebenfalls monoton nicht-fallend.

Beweis: Die Funktionalgleichung für V_α^b beweist sich genauso wie die Optimalitätsgleichung (Satz 30). Es müssen auch hier nur die Ausdrücke $\min_{[0,y]}$ und V_α durch die Terme $\min_{\{0,y\}}$ und V_α^b ausgetauscht werden. Die Optimalität von δ_α ergibt sich genauso wie im diskreten Modell. Um die Monotonie von V_α^b zu beweisen, werde ψ^b definiert:

$$\psi^b(x,\alpha,N) = \inf_{\{\delta\in\Pi_2^b\}} E_\delta\left(\sum_{n=0}^{N}\alpha^n c_\alpha(n)\right).$$

Analog zum Beweis der Monotonie von V_α (Satz 35) ist es ausreichend, durch vollständige Induktion die Monotonie von $\psi^b(x,\alpha,N)$ in $N \in \mathbb{Z}^+ \ \forall x \in I, \alpha \in [0,1]$ zu zeigen. Es vereinfacht sich der Induktionsschluß:

$$\psi^b(x,\alpha,N{+}1) = r(x) + \int_0^N \min\left\{d(y,0)+\alpha\psi^b(y,\alpha,N), d(y,y)+\alpha\psi^b(0,\alpha,N)\right\}\, dF(y|x).$$

Auf Grund der Induktionsvoraussetzung (Monotonie von $\psi^b(y,\alpha,N)$ in y) und der Monotonie von d in beiden Komponenten ist das Minimum in y monoton nicht-fallend und somit auch $\psi^b(x,\alpha,N+1)$ in x, so daß die Induktion bereits vollzogen ist. ■

Satz 37 (1) *In der Unterklasse der bang-bang Strategien gibt es, wenn neben der Bedingung A auch die Bedingung B gilt, eine optimale Strategie δ_α^* der folgenden Gestalt:*

$$\delta_\alpha^*(j) = \begin{cases} 0 & \alpha(V_\alpha^b(x) - V_\alpha^b(0)) \le d(x,x) - d(x,0), \\ x & \alpha(V_\alpha^b(x) - V_\alpha^b(0)) > d(x,x) - d(x,0). \end{cases}$$

Wenn $d(x,x) - d(x,0)$ monoton nicht-wachsend in x, $x \in I$ ist, dann sind die Strategien der folgenden Gestalt optimal in der Unterklasse der bang-bang Strategien:

$$\delta_{z,\alpha}^*(y) = \begin{cases} 0 & y < z, \\ y & y \ge z, \end{cases} \quad z \in [y_\alpha^*, x_\alpha^*]$$

mit $x_\alpha^* = \inf A_\alpha,\ A_\alpha := \{x \in I:\ \alpha(V_\alpha^b(x) - V_\alpha^b(0)) > d(x,x) - d(x,0)\}$
und $y_\alpha^* = \inf \tilde{A}_\alpha,\ \tilde{A}_\alpha := \{y \in I:\ \alpha(V_\alpha^b(y) - V_\alpha^b(0)) \ge d(y,y) - d(y,0)\}$,
($x_\alpha^* = \infty$ wenn $A_\alpha = \emptyset$ und $y_\alpha^* = \infty$ wenn $\tilde{A}_\alpha = \emptyset$).
Solche Strategien heißen auch hier bang-bang Strategien mit Schwellenwert z.

In den folgenden beiden Teilaussagen dieses Satzes sei erneut die Funktion $d(x,x) - d(x,0)$ monoton nicht-wachsend:

(2) *Es sei $A \subset I$ und δ_A eine bang-bang Strategie mit $\delta(z) = 0$ für alle $z \in A \cap (x_\alpha^*, \infty)$ oder $\delta(z) = z$ für alle $z \in A \cap [0, y_\alpha^*)$. Falls δ_A optimal ist, dann ist $P_x(A \backslash [y_\alpha^*, x_\alpha^*]) = 0$ $\forall x \in I$.*

(3) *Wenn eine bang-bang Stratege mit Schwellenwert $z \notin [y_\alpha^*, x_\alpha^*]$ ebenfalls optimal ist, dann gilt $P_x(M_z) = 0\ \forall x \in I$ für $M_z := (z, y_\alpha^*] \cup (x_\alpha^*, z]$.*
Weil $x_\alpha^* \ge z_\alpha^*$ ist, ist für jedes $z \in \mathbb{R}^+$ eine dieser beiden Mengen leer.

Der **Beweis** des ersten Teils ist eine direkte Übertragung des entsprechenden Beweises von Satz 10. Nun wird der zweite Teil bewiesen: Aus der Optimalität der dort angegebenen Strategie δ gilt für $x \in I$:

$$\begin{aligned} 0 &= V^b_{\delta_A,\alpha}(x) - V^b_{\delta_{x^*_\alpha},\alpha}(x) \\ &= \int_{y\in I} \Big(d(y,\delta_A(y)) + \alpha V^b_\alpha(y-\delta_A(y)) - d(y,\delta_{x^*}(y)) - \alpha V^b_\alpha(y-\delta_{x^*}(y)\Big) \; dF(y|x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Es ist } d(y,\delta_A(y)) + \alpha V^b_\alpha(y-\delta_A(y)) &\geq d(y,\delta_{x^*_\alpha})(y) + \alpha V^b_\alpha(y-\delta_{x^*_\alpha})(y) \; \forall y \in I \\ \text{und } d(y,\delta_A(y)) + \alpha V^b_\alpha(y-\delta_A(y)) &> d(y,\delta_{x^*_\alpha})(y) + \alpha V^b_\alpha(y-\delta_{x^*_\alpha})(y) \; \forall y \in A\backslash[y^*_\alpha, x^*_\alpha], \end{aligned}$$

so daß sich $P_x(A\backslash[y^*_\alpha, x^*_\alpha]) = 0$ ergibt. Die Aussage des letzten Teils ist letztlich lediglich ein Spezialfall des zweiten Teils mit der Wahl $A = M_z$. ■

Lemma 28

Für festes $y \in I$ sei $f(y|x)$ stetig differenzierbar in $x \in I$. Es sei $X := \Big\{ g : I \to I\!R^+ | \forall x \exists \epsilon(x) > 0$, so daß $\sup_{\{|z-x|<\epsilon(x)\}^+} \Big\{ \Big| \frac{\partial f(y|z)}{\partial z} \Big| \Big\} g(y)$ und $f(y|x)g(y)$ integrierbar sind in y auf $I \; \forall x \in I \Big\}$ und $1_I \in X$. Dann gilt:
Die Funktion $\frac{\partial F(y|x)}{\partial x}$ ist genau dann für jedes $y \in I$ monoton nicht-fallend in $x \in I$, wenn $\int_I \frac{\partial f(y|x)}{\partial x} g(y)\, dy$ monoton nicht-wachsend in x ist für alle Funktionen g aus X.

Beweis: Wegen $1_I \in X$ ist die Funktion $\sup_{\{|z-x|<\epsilon(x)\}^+} \Big\{ \Big| \frac{\partial f(y|z)}{\partial z} \Big| \Big\}$ integrierbar. Zu g sei $(g_n)_{n\in N}$ wieder die in Lemma 24 konstruierte Folge. Wegen der Nicht-Negativität von g ist die Konstante β ebenfalls nicht-negativ. Die Funktion $\sup_{\{|z-x|<\epsilon(x)\}^+} \Big\{ \Big| \frac{\partial f(y|z)}{\partial z} \Big| \Big\} |g(y)|$ ist eine Majorante, sowohl von $\frac{\partial f(y|x)}{\partial x} g$ als auch von $\frac{\partial f(y|x)}{\partial x} g_n(y)$, und daher kann Lemma 26 angewendet werden:

$$\begin{aligned} \int_I \frac{\partial f(y|x)}{\partial x} g(y)\, dy &= \int_I \lim_{n\to\infty} \frac{\partial f(y|x)}{\partial x} g_n(y)\, dy = \lim_{n\to\infty} \int_I \frac{\partial f(y|x)}{\partial x} g_n(y)\, dy \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_I \frac{\partial f(y|x)}{\partial x} \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{\infty} 1_{[(a_{k,n},\infty)}(y) + \beta \right) dy \\ &\overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_{k,n}}^N \frac{\partial f(y|x)}{\partial x}\, dy + \beta \int_I \frac{\partial f(y|x)}{\partial x}\, dy \\ &\overset{1_I \in X}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \int_{a_{k,n}}^N f(y|x)\, dy + \beta \frac{d}{dx} \int_I f(y|x)\, dy \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} (1 - F(a_{k,n}|x)) + \beta \frac{d}{dx} 1 \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x} F(a_{k,n}|x) \right). \quad (**) \end{aligned}$$

$(*)$ gilt, weil bei festem $n \in I\!N$ jede Funktion $\psi_m(x) := \frac{\partial f(y|x)}{\partial x} \frac{1}{2^n} \left(\sum_{k=1}^m 1_{[(a_{k,n},N]}(y) + \beta \right)$ auf I die folgende Ungleichung erfüllt:

$$|\psi_m(x)| = \left| \frac{\partial f(y|x)}{\partial x} \right| \frac{1}{2^n} \left(\sum_{k=1}^m 1_{[(a_{k,n},N]}(y) + \beta \right) \leq \left| \frac{\partial f(y|x)}{\partial x} \right| \frac{1}{2^n} \left(\sum_{k=1}^{\infty} 1_{[(a_{k,n},N]}(y) + \beta \right).$$

Deshalb gilt $\quad |\psi_m(x)| \quad \leq \quad \left|\frac{\partial f(y|x)}{\partial x}\right| g_n(y).$

Da $\left|\frac{\partial f(y|x)}{\partial x}\right| g_n(y)$ integrierbar ist und alle Funktionen ψ_m dominiert, gilt nach dem Lebesgueschen Konvergenzsatz $\int \lim_{m\to\infty} \psi_m(x) = \lim_{m\to\infty} \int \psi_m(x)$ und somit

$$\begin{aligned}
\int_0^N \frac{\partial f(y|x)}{\partial x} \left(\sum_{k=1}^{\infty} 1_{[(a_{k,n},\infty)}(y) + \beta\right) &= \lim_{m\to\infty} \int_0^N \left(\frac{\partial f(y|x)}{\partial x} \sum_{k=1}^{m} 1_{[(a_{k,n},\infty)}(y) + \beta\right) dy \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^N \frac{\partial f(y|x)}{\partial x} \left(1_{[(a_{k,n},\infty)}(y) + \beta\right) dy.
\end{aligned}$$

Damit ist $(*)$ gezeigt, und es werde wieder der eigentliche Beweis betrachtet: Auf Grund der Identität $(**)$ ist die Beweisrichtung $'\Rightarrow'$ gezeigt, da aus $\frac{\partial F}{\partial x}(y|x)$ monoton nicht-fallend in x folgt, daß das gesamte Integral monoton nicht-wachsend in x ist. Um die entgegengesetzte Richtung dieser Aussage zu zeigen, wird erneut wie beim Beweis von Lemma 25 die dortige Funktion $h := 1_{[a,N]}$ verwendet, die in X enthalten ist, da 1_I es ist:

$$\begin{aligned}
F(a|x) &= 1 - \int_0^N f(y|x)h(y)\,dy. \\
\text{Somit ist } \frac{\partial F(a|x)}{\partial x} &= -\int_0^N \frac{\partial f(y|x)}{\partial x} h(y)\,dy \quad \text{monoton nicht-fallend.} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Nun werden auch hier weitere Bedingungen an das System gestellt:

(4) (a) $d(x,x) - d(x,0)$ ist monoton nicht-wachsend in $x, x \in I$; **oder**
(b) es existiert ein $\rho > 0$ und ein $x_0 > 0$, so daß gilt:
$d(x,x) - d(x,0) = \alpha\rho x$ *(Linearität)* und $x \geq x_0 \Rightarrow r(x) > r(0) + \rho x$.
(5) $r(x)$ ist differenzierbar, und $r'(x)$ ist monoton nicht-wachsend.
(6) Für festes $y \in I$ ist $f(y|x)$ in $x \in I$ stetig differenzierbar, und für alle $x \in I$ existiert ein $\epsilon(x) > 0$, so daß jede Funktion
$g_x(y) := \max\left\{\tilde{K}_y^\alpha, 1\right\} \sup_{\{|z-x|<\epsilon(x)\}^+} \left|\frac{\partial f(y|z)}{\partial z}\right|$ *auf I integrierbar ist.*
(7) Die Kostenfunktion d ist in der zweiten Komponente konkav.
(8) Die Funktion $\frac{\partial F(y|x)}{\partial x}$ ist für festes $y \in I$ in x monoton nicht-fallend.

Korollar 10 sichert wegen Voraussetzung (6) die Existenz der in Voraussetzung (8) erwähnten Funktion $\frac{\partial F(y|x)}{\partial x}$.

Nun läßt sich auch in diesem Modell der entscheidende folgende Satz beweisen:

Satz 38 *$V_\alpha(x)$ ist für alle $\alpha \in (0,1)$ konkav in x, $x \in I$.*

Beweis: Die in Satz 36 verwendete Funktion g_x wird von der integrierbaren Funktion $\tilde{g}_x$ aus der Voraussetzung (6) majorisiert und ist somit integrierbar. Die stetige

Differenzierbarkeit von $f(y|.)$ für festes $y \in I$ ist ebenfalls nach Voraussetzung (6) und die Differenzierbarkeit von r nach Voraussetzung (5) gesichert. Somit ist Satz 36 anwendbar, und es gilt:

$$V'_\alpha(x) = r'(x) + \int_0^N \frac{\partial f(y|x)}{\partial x} \min_{a\in[0,y]} \{d(y,a) + \alpha V_\alpha(y-a)\}\ dy.$$

Nun betrachte man außer der Funktion $\tilde{g}_x$ von Voraussetzung (6) auch die Menge X von Lemma 28. Es ist die Funktion $1_I \in X$ nach Voraussetzung (6) wegen $\sup_{\{|z-x|<\epsilon(x)\}^+} \left|\frac{\partial f(y|z)}{\partial z}\right| \leq \tilde{g}_x(y)$, und die Funktion $\min_{a\in[0,y]}\{d(y,a) + \alpha V_\alpha(y-a)\}$ ist kleinergleich $\tilde{K}_y^\alpha$ nach dem Beweis von Satz 36 und daher wegen
$\tilde{g}_x(y) \geq \tilde{K}_y^\alpha \sup_{\{|z-x|<\epsilon(x)\}^+} \left|\frac{\partial f(y|z)}{\partial z}\right|$ nach Voraussetzung (6) ebenfalls in X. Somit kann das Lemma 28 angewendet werden: Nach dem zweiten Teil der Voraussetzung (5) und der Voraussetzung (8) sind beide Summanden monoton nicht-wachsend in $x \in I$. Demnach ist auch die Summe monoton nicht-wachsend, also V_α konkav. ■

Genauso wie im diskreten Fall kann sich daher bei der Suche nach der optimalen Strategie auf die Unterklasse der *bang-bang-Stategien* beschränkt werden, da hier für jedes feste $x \in I$ die Funktion $d(x,y) + V_\alpha(x-y)$ konkav ist in $y \in [0,x]$. Es gilt daher der folgende

Satz 39 *Unter den Voraussetzungen* $(1),...,(3)$ *und* $(5),...,(8)$ *gilt, wenn neben der Bedingung A auch die Bedingung B gilt:*
Eine optimale Strategie sieht folgendermaßen aus:

$$\delta^*_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \alpha(V_\alpha(x) - V_\alpha(0)) \leq d(x,x) - d(x,0), \\ x & \alpha(V_\alpha(x) - V_\alpha(0)) > d(x,x) - d(x,0). \end{cases}$$

Unter der zusätzlichen Voraussetzung (4) *sind die Strategien der folgenden Gestalt optimal:*

$$\delta^*_{z,\alpha}(y) = \begin{cases} 0 & y < z, \\ y & y \geq z, \end{cases} \quad z \in [y^*_\alpha, x^*_\alpha].$$

Bei den folgenden zwei Teilen dieses Satzes sei ebenfalls die Voraussetzung (4) *erfüllt:*
(2) *Es sei $A \subset I$ und δ_A eine bang-bang Strategie mit $\delta(z) = 0$ für alle $z \in A \cap (x^*_\alpha, N]$ oder $\delta(z) = z$ für alle $z \in A \cap [0, y^*_\alpha)$. Falls δ_A optimal ist, dann ist $P_x(A \backslash [y^*_\alpha, x^*_\alpha]) = 0$ $\forall x \in I$.*

(3) *Wenn eine bang-bang Strategie mit Schwellenwert $z \notin [y^*_\alpha, x_\alpha]$ ebenfalls*

optimal ist, dann gilt $f(y|x) = 0\ \forall (x,y) \in I \times M_z$ mit $M_z := (z, y^*_\alpha] \cup (x^*_\alpha, z]$.

Es sei daran erinnert, daß wegen $x^*_\alpha \geq z^*_\alpha$ für jedes $z \in I$ eine dieser beiden Mengen leer ist.

Es steht lediglich noch der **Beweis** unter dem zweiten Teil der Bedingung (4) aus: Zunächst einmal muß die Funktion W_α ebenfalls monoton nicht-fallend sein. Dieses Resultat kann entweder direkt, d.h. genauso wie die Monotonie der Funktion V_α bewiesen werden, oder aus der Monotonie von V_α und Korollar 8 gefolgert werden. Nun folgt:

$$\begin{aligned} V_\alpha(x) - V_\alpha(0) &= r(x) - r(0) + \int_0^N W_\alpha(y)\, dF(y|x) - \int_0^N W_\alpha(y)\, dF(y|0) \\ &\geq r(x) - r(0) \\ \text{also } \alpha\,(V_\alpha(x) - V_\alpha(0)) &> \alpha\rho x = d(x,x) - d(x,0) \quad \forall x \geq x_0. \end{aligned}$$

Die linke Seite ist konkav und ab dem Wert x_0 größer als die Gerade auf der rechten Seite. Daher ergibt die gleiche Fallunterscheidung wie im diskreten Fall (siehe Skizze im Beweis von Satz 15), daß die Gerade entweder auf ganz I größer ist als die Funktion der linken Seite und der Schwellenwert der optimalen Strategie somit 0 ist, oder es ein x_α^* und ein y_α^* gibt, so daß die linke Seite in $[0, y_\alpha^*)$ kleiner, in $[y_\alpha^*, x_\alpha^*]$ gleich und in $(x_\alpha^*, N]$ größer als die rechte Seite ist und deshalb die gesuchten Schwellenwerte Elemente aus $[y_\alpha^*, x_\alpha^*]$ sind. ■

Für den nächsten Satz und das darauf folgende Korollar wird wegen der Analogie zum ersten Modell der Beweis nicht ausgeführt:

Satz 40 *Wenn unter den Bedingungen* (1), ..., (8) *für ein* $x \in I$ *die folgende Bedingung gilt:*

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(r(x) - r(0) + \int_0^N d(y, y-x)\, dF(y|x) - \int_0^N d(y,0)\, dF(y|0)\right) < d(x,x) - d(x,0),$$

dann gilt für das x_α^* *aus dem letzten Satz:* $x_\alpha^* > x$.

Korollar 11 *Es gilt*

$$\frac{1}{1-\alpha}\left(r(0) + \int_0^N d(y,0)\, dF(y|0)\right) \leq V_\alpha(0) \leq \frac{1}{1-\alpha}\left(r(0) + \int_0^N d(y,y)\, dF(y|0)\right),$$

die Funktion $\alpha \to (1-\alpha)V_\alpha(0)$ *ist also beschränkt.*

Ist die Strategie δ eine bang-bang Strategie mit Schwellenwert z, dann gilt für die zugehörige Wertfunktion $V_{\delta,\alpha}$ die folgende Identität:

$$V_{\delta,\alpha}(x) = r(x) + \int_x^z (d(y,0) + \alpha V_{\delta,\alpha}(y))\, dF(y|x) + \int_z^N (d(y,y) + \alpha V_\alpha(0))\, dF(y|x).$$

Für $x < z$ ergibt sich die folgende Integralgleichung:

$$V_\alpha(x) = r(x) + \int_x^z (d(y,0) + \alpha V_\alpha(y)) dF(y|x) + \int_z^N d(y,y) dF(y|x) + \alpha V_\alpha(0)(1 - F(z|x)).$$

Um nun $V_\alpha(x)$ für alle $x > z$ bestimmen zu können, ist lediglich die Kenntnis von $V_\alpha(0)$ nötig, denn in diesem Definitionsbereich gilt die folgende Identität:

$$V_\alpha(x) = r(x) + \int_x^N d(y,y)\,dF(y|x) + \alpha V_\alpha(0).$$

Abschließend läßt sich der Satz 16 einschließlich Beweis vollständig übertragen:

Satz 41 *Auch ohne die Erfüllung der Bedingung B gilt das Folgende:*
Wenn bekannt ist, daß eine bang-bang Strategie mit Schwellenwert optimal ist und V_{δ_x} für ein $x \in I$ eine Lösung der Optimalitätsgleichung ist, dann ist δ_x optimal.

Die Politik-Iteration, die ein solches δ_x bestimmt, ermittelt also immer eine optimale Strategie.

3.2 Das Durchschnittskostenkriterium

Hier werden gleich nur nach unten beschränkte, also o.B.d.A. nicht-negative Betriebskostenfunktionen r und Reparaturkostenfunktionen d behandelt. Von beiden Funktionen wird Meßbarkeit verlangt. Es wird die folgende Wertfunktion, die die Durchschnittskosten im stetigen Fall angibt, betrachtet:

$$\phi_\delta(x) = \limsup_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} E_\delta \left(\sum_{n=0}^{m} \left(r(X_n) + \int_0^N d(y,\delta(y)) dF_{X_n}(y) \right) \middle| X_0 = x \right),$$

falls der Erwartungswert $E(r(X_n) + d(X_{n+1}^-, \delta(X_{n+1}^-))$ für alle $n \in I\!N$ existiert, also alle Integrale $\int_x^N r(y)\,dF_x^{(n)}(y)$ und $\int_x^N d(y,\delta(y))\,dF_x^{(n)}(y)$ $(n \in I\!N)$ endlich sind. Ansonsten wird $\phi_\delta(x) = \infty$ gesetzt. Die Voraussetzung (0) des diskreten Falles wird hier folgendermaßen verallgemeinert:

Voraussetzung (0):
Es sei Z die Zufallsvariable auf $I\!R^+$ mit $Z(y) := d(y,y)$. Der Erwartungswert von Z existiere bzgl. jedes Wahrscheinlichkeitsmasses F_x, $x \in I\!R^+$; also $E_x(Z) := E_{F_x}(Z) < \infty$.

Neben der Voraussetzung (0) seien hier gleich die **Voraussetzungen (1),(2) und (3)** des diskontierten Modells mit überabzählbarem Zustandsraum erfüllt.

Lemma 29 *Es gilt $\phi := \inf_{\{\delta\in\Pi_2\}} \phi_\delta < \infty$.*

Beweis:

$$\begin{aligned} \phi &\le \phi_{\delta_0}(x) \\ &= \limsup_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} \left(r(x) + \int_{y=x}^N d(y,y)\,dF_x(y) + m\left(r(0) + \int_{y=0}^N d(y,y)\,dF_0(y) \right)\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \limsup_{m\to\infty} \frac{1}{m+1}\left(r(x) + E_x(Z) + m(r(0) + E_0(Z))\right) \\
&= r(0) + E_0(Z) \quad \text{da } |E_x(Z)| < \infty \; \forall x \in I \\
&< \infty. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Da die Suche nach der Durchschnittskosten-optimalen Strategie nur unter der Aussage dieses Lemmas sinnvoll ist, wurde für dieses Modell die Voraussetzung (0) verlangt. Einschließlich **Beweis** analog zu Lemma 14 und Lemma 15 gilt hier das folgende Lemma. Natürlich gilt der erste Teil auch ohne Erfüllung der Voraussetzungen (1), (2) und (3):

Lemma 30

1. *Für alle $x \in I$ gilt:*

   $$\limsup_{\alpha\to 1}(1-\alpha)V_\alpha(x) \le \phi(x), \quad \limsup_{\alpha\to 1}(1-\alpha)V_\alpha^b(x) \le \phi^b(x)$$

   $$\textit{und } \limsup_{\alpha\to 1}(1-\alpha)V_{\delta,\alpha}^b(x) \le \phi_\delta(x) \quad \forall \delta \in \Pi_1.$$

2. *Es existieren g, $g^b \in I\!R^+$ und $(\alpha_n)_{n=1}^\infty \uparrow 1$, $(\alpha_n^b)_{n=1}^\infty \uparrow 1$ mit*

   $$\lim_{n\to\infty}(1-\alpha_n)V_{\alpha_n}(x) = g \textit{ und } \lim_{n\to\infty}(1-\alpha_n^b)V_{\alpha_n^b}^b(x) = g^b.$$

Der Beweis des zweiten Teils ist deshalb analog zum Beweis von Lemma 15, da die Bedingungen (1), ..., (3) für die Monotonie der diskontierten Kostenfunktionen V_α sorgen und somit auch die Abschätzung $V_\alpha(x) - V_\alpha(0) \le r(x) + E_x(Z) < \infty$ gilt.

Um den Existenzsatz für dieses Modell beweisen zu können, ist es nötig, die Grenzwert- und Minimumbildung vertauschen zu können. Dazu wird das Lemma 4.2.4 von Hernandez-Lerma, Lasserre [10] benutzt. Da es aber etwas modifiziert wird, soll es hier noch einmal mit Beweis präsentiert werden:

Lemma 31 *Es seien u und u_n ($n \in I\!N$) $I^2 \to I\!R$ in der zweiten Komponente von unten halbseitig stetige Funktionen, die von unten beschränkt sind, und es gelte* $\lim_{n\to\infty} u_n = u$, $u_{n+1} \ge u_n \; \forall n \in I\!N$. *Dann hat die folgende Identität Gültigkeit:*

$$\lim_{n\to\infty}\min_{a\in[0,x]} u_n(x,a) \quad = \quad \min_{a\in[0,x]} u(x,a) \qquad \forall x \in I.$$

Beweis: Für $x \in I$ seien

$$l(x) := \lim_{n\to\infty}\min_{a\in[0,x]} u_n(x,a) \quad \text{und} \quad u^*(x) := \min_{a\in[0,x]} u(x,a).$$

Aus $u_n \leq u \, \forall n \in I\!N$ folgt $l \leq u^*$. Um die umgekehrte Ungleichung zu zeigen, sei $x \in I$ fest gewählt. Als nächstes werden für $n \in I\!N$ die folgenden Mengen betrachtet:

$$A_n := \{a \in [0,x] | u_n(x,a) \leq u^*(x)\} \text{ und } A_0 := \{a \in [0,x] | u_0(x,a) = u^*(x)\}.$$

Da die Funktionen u_n von unten gegen die Funktion u konvergieren, sind alle diese Mengen nicht leer. Die halbseitige Stetigkeit der u_n von unten in der zweiten Komponente ist nach Definition 6 äquivalent dazu, daß für jedes $\gamma \in I\!R$ und festes $n \in I\!N$ die Menge $U_\gamma := \{a \in I | u_n(x,a) \leq \gamma\}$ abgeschlossen ist. Somit ist $A_n = U_{u^*(x)} \cap [0,x]$ abgeschlossen und beschränkt und folglich kompakt. Gleiches gilt offensichtlich für A_0, und die Folge der Mengen A_n konvergiert nach unten gegen die Menge A_0. Da u_n in der zweiten Komponente halbseitig stetig ist, gibt es nach Lemma 17 ein $a_n \in A_n$ mit $u_n(x,a_n) = \min_{a \in [0,x]} u_n(x,a)$. Da die kompakten Mengen A_n von oben gegen die kompakte Menge A_0 konvergieren, gibt es somit eine Teilfolge (a_{n_i}) von (a_n) mit $a_{n_i} \to a_0$. Wegen des monotonen Wachstums der u_n gilt also für jedes $n \in I\!N$: $u_{n_i}(x, a_{n_i}) \geq u_n(x, a_{n_i}) \; \forall n_i \geq n$. Die halbseitige Stetigkeit von unten ergibt für den Grenzübergang $i \to \infty$ die Ungleichung $l(x) \geq u_n(x,a_0) \; \forall n \in I\!N$ und somit $l(x) \geq u(x,a_0) = u^*(x)$. ∎

Satz 42 *Es seien (α_n) und (α_n^b) die gegen 1 konvergierende Folge von Diskontierungsfaktoren aus dem Lemma 30,*

$$h(x) := \liminf_{n\to\infty} (V_{\alpha_n}(x) - V_{\alpha_n}(0)) \; \forall x \in I \textit{ und } g := \lim_{n\to\infty} (1-\alpha_n) V_\alpha(0);$$
$$h^b(x) := \liminf_{n\to\infty} \left(V^b_{\alpha_n^b}(x) - V^b_{\alpha_n^b}(0)\right) \; \forall x \in I \textit{ und } g^b := \lim_{n\to\infty} (1-\alpha_n^b) V_{\alpha_n^b}(0).$$

1. *Es gelte entweder die Zusatzvoraussetzung, daß die Funktionenfolge $(V_{\alpha_n}(x) - V_{\alpha_n}(0))_{n \in N}$ monoton nicht-fallend in $n \in I\!N$ ist (somit ist $(V_{\alpha_n}(x) - V_{\alpha_n}(0)) \uparrow h(x)$),* **oder** *neben den Voraussetzungen $(1), ..., (3)$ seien auch die Voraussetzungen (4) oder $(4a), (5), ..., (8)$ des diskontierten Modells erfüllt. Dann gilt für die Strategie δ^*, die für alle $x \in I$ F_x−fast sicher die Identität $d(y,\delta^*(y)) + h(y - \delta^*(y)) = \min_{\{0 \leq a \leq y\}}\{d(y,a) + h(y-a)\}$ in $y \in I$ erfüllt, das Folgende: (g,h,δ^*) ist ein kanonisches Tripel, δ^* Durchschnittskosten-optimal, und es gilt $\phi = \phi_{\delta^*} \equiv g$.*

2. *δ_b^* sei die Strategie, für die für alle $x \in I$ F_x−fast sicher die Identität $d(y,\delta_b^*(y)) + h(y - \delta_b^*(y)) = \min_{a \in \{0,y\}}\{d(y,a) + h(y-a)\}$ in $y \in I$ gilt. Dann ist (g,h,δ^*) ein kanonisches Tripel bzgl. des Raumes Π_2^b, δ^* Durchschnittskosten-optimal in der Klasse der bang-bang Strategien, und es gilt $\phi^b = \phi^b_{\delta^*} \equiv g$.*

Beweis: Es seien $h_\alpha(x) := V_\alpha(x) - V_\alpha(0)$ und $g(\alpha) := (1-\alpha)V_\alpha(0)$. Ähnlich zu dem diskreten Fall wird hier durch vollständige Induktion über $n \in I\!N$ die folgende Identität für alle $x \in I$ gezeigt:

$$ng + h(x) = E_{\delta^*}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(r(X_k) + d(X_{k+1}^-, \delta^*(X_{k+1}^-)) \right) \Big| X_0 = x \right) + E_{\delta^*}(h(X_n) | X_0 = x).$$

Beim Induktionsanfang erhält man hier die Gleichung

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(g(\alpha_n)+h_{\alpha_n}(x)) &= r(x)+\lim_{n\to\infty}\int_{y=x}^{N}\min_{a\in[0,y]}\{d(y,a)+\alpha_n h_{\alpha_n}(y-a)\}\ dF_x(y)\\ &= r(x)+\int_{y=x}^{N}\lim_{n\to\infty}\min_{a\in[0,y]}\{d(y,a)+\alpha_n h_{\alpha_n}(y-a)\}\ dF_x(y),\end{aligned}$$

da der Integrand in n monoton nicht-fallend ist. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}g+h(x) &= r(x)+\int_{y=x}^{N}\min_{\{a\in[0,y]\}}\{d(y,a)+h(y-a)\}\ dF_x(y)\\ &= E_{\delta^*}\left(\sum_{k=0}^{0}\Big(r(X_k)+d(X_{k+1}^-,\delta^*(X_{k+1}^-))\Big)\Big|X_0=x\right)+E_{\delta^*}(h(X_1)|X_0=x).\end{aligned}$$

Zum Induktionsschluß gibt es nichts hinzuzufügen.
Nun kann das Lemma 42 verwendet werden mit

$$u_n(y,a)=d(y,a)+\alpha_n h_{\alpha_n}(y-a) \text{ und } u(y,a)=d(y,a)+\lim_{n\to\infty}\alpha_n h_{\alpha_n}(y-a).$$

Zunächst sei die Zusatzvoraussetzung erfüllt: Jede Funktion $h_{\alpha_n}(y-a)=V_{\alpha_n}(y-a)-V_{\alpha_n}(0)$ ist von unten halbseitig stetig, da V_α nach der Meßbarkeitsbedingung des diskontierten Modells von unten halbseitig stetig ist. Damit gilt dies auch für jedes u_n und wegen $u_n\uparrow u$ auch für u. Somit gilt

$$\lim_{n\to\infty}(g(\alpha_n)+h_{\alpha_n}(x))=\int_{y=x}^{N}\min_{a\in[0,y]}\left\{d(y,a)+\lim_{n\to\infty}\alpha_n h_{\alpha_n}(y-a)\right\}dF_x(y).$$

Der Rest des Beweises der Aussage 1. stimmt mit dem von Satz 25 überein. Nun ist aber die Zusatzvoraussetzung schwer zu überprüfen. Sind die Voraussetzungen $(1),...,(3)$, (4) oder $(4a)$ und $(5),...,(8)$ des diskontierten Modells erfüllt, dann ergibt sich der letzte Schritt, also die Vertauschung von Grenzwert- und Minimumbildung aus der folgenden Argumentation:
Nach Satz 38 nimmt jede Funktion $m_n^y:[0,y]\to I\!R^+$ mit $m_n^y(a)=d(y,a)+\alpha_n V_{\alpha_n}(y-a)$ ihr Minimum entweder in 0 oder in y an. Dies gilt somit auch für jede Funktion $m_n^y-V_{\alpha_n}(0)=d(y,a)+\alpha_n h_{\alpha_n}(y-a)$. Da die Grenzfunktion $d(y,a)+h(y-a)=\lim_{n\to\infty}(d(y,a)+\alpha_n V_{\alpha_n}(y-a))$ existiert, nimmt folglich auch sie ein Minimum in 0 oder in a an, so daß auch die letzte Identität der folgenden Gleichungskette bewiesen ist:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\min_{\{0\le a\le y\}}\{d(y,a)+\alpha_n h_n(y-a)\} &= \lim_{n\to\infty}\min_{a\in\{0,y\}}\{d(y,a)+\alpha_n h_n(y-a)\}\\ &= \min_{a\in\{0,y\}}\{d(y,a)+h(y-a)\}\\ &= \min_{\{0\le a\le y\}}\{d(y,a)+h(y-a)\}.\end{aligned}$$

Der Beweis des zweiten Teils ist völlig analog zum Beweis von Satz 25, da hier auch nur das Minimum über eine endliche Menge gebildet wird. ■

Aus diesem Satz ergibt sich direkt das

Korollar 12 *Es seien (α_n) und (α_n^b) die in Lemma 30(2) verwendeten Folgen von Diskontierungsfaktoren.*

1. *Unter den Bedingungen (1),...,(3) minimiert diejenige Strategie δ_b^* in Π_1^b die Durchschnittskosten, die die folgende Gleichung in jedem $x \in I$ F_z- fast sicher erfüllt für alle $z \in I$:*

$$\begin{aligned} & d(x,\delta_b^*(x)) + \liminf_{n\to\infty}\left(V_{\alpha_n}^b(x-\delta_b^*(x)) - V_{\alpha_n}^b(0)\right) \\ = & \min_{a\in\{0,x\}}\left\{d(x,a) + \liminf_{n\to\infty}\left(V_{\alpha_n}^b(x-a) - V_{\alpha_n}^b(0)\right)\right\}. \end{aligned}$$

2. *Unter den Bedingungen (1),...,(8) minimiert diejenige Strategie δ^* in Π_1 die Durchschnittskosten, die die folgende Gleichung in jedem x F_z-fast sicher erfüllt für alle $z \in I$:*

$$\begin{aligned} & d(x,\delta^*(x)) + \liminf_{n\to\infty}\left(V_{\alpha_n}(x-\delta^*(x)) - V_{\alpha_n}(0)\right) \\ = & \min_{a\in[0,x]}\left\{d(x,a) + \liminf_{n\to\infty}\left(V_{\alpha_n}(x-a) - V_{\alpha_n}(0)\right)\right\}. \end{aligned}$$

Satz 43 *Der Wert x_α^* sei auch hier der Schwellenwert der bang-bang Strategie, der die $\alpha-$diskontierten Kosten in Π_2^b unter den Bedingungen A, B, (1), (2) und (3) minimiert. Es seien die Bedingungen (1), (2), (3), A und B erfüllt. Es gibt eine Folge $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ von Diskontierungsfaktoren mit $\alpha_n \uparrow 1$, so daß es einen Wert $x^* \in I \cup \{\infty\}$ gibt mit $x^* := \lim_{n\to\infty} x_{\alpha_n}^*$. Wenn $F_x(x^*-) = F_x(x^*+)\ \forall x \in I$ gilt, dann gilt das Folgende:*

1. *Die bang-bang Strategie δ_{x^*} minimiert in Π_2^b die Durchschnittskosten.*

2. *Unter den zusätzlichen Voraussetzungen (4),...,(8) minimiert δ_{x^*} in Π_2 die Durchschnittskosten.*

Beweis: Nach dem Lemma 30 gibt es eine Folge von Diskontierungsfaktoren $(\alpha_n^b)_{n=1}^\infty$ mit $\alpha_n^b \uparrow 1$, so daß $\lim_{n\to\infty}(1-\alpha_n^b)V_{\alpha_n^b}^b(x) = \phi^b(x)\ \forall x \in I$ gilt. Nun sei $(\alpha_n)_{n=1}^\infty \subset (\alpha_n^b)_{n=1}^\infty$ so gewählt, daß $x^* := \lim_{n\to\infty} x_{\alpha_n}^*$ in $I\!R^+ \cup \{\infty\}$ existiert. O.B.d.A. sei $x_{\alpha_n}^* \uparrow x^*$ oder $x_{\alpha_n}^* \downarrow x^*$. Für alle $x \neq x^*$ gibt es somit ein $n_0 \in I\!N$ mit $\delta_{x_{\alpha_n}^*}(x) = \delta_{x^*}(x)\ \forall n \geq n_0$. Wegen $F_x(x^*+) = F_x(x^*-)\ \forall x \in I$ gilt die Identität $\lim_{n\to\infty}\delta_{x_{\alpha_n}^*} = \delta_{x^*}$ F_z-fast sicher für alle $z \in I$. Somit ergibt sich die folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned} & d(x,\delta_{x^*}(x)) + \liminf_{n\to\infty}\left(\alpha_n\left(V_{\alpha_n}^b(x-\delta_{x^*}(x)) - V_{\alpha_n}^b(0)\right)\right) \\ = & \liminf_{n\to\infty}\left(d(x,\delta_{x_{\alpha_n}^*}(x)) + \alpha_n\left(V_{\alpha_n}^b(x-\delta_{x_{\alpha_n}^*}(x)) - V_{\alpha_n}^b(0)\right)\right) \quad F_z-\text{f.s.}\ \forall z \in I \\ = & \liminf_{n\to\infty}\min_{a\in\{0,x\}}\left\{d(x,a) + \alpha_n\left(V_{\alpha_n}^b(x-a) - V_{\alpha_n}^b(0)\right)\right\} \\ = & \min_{a\in\{0,x\}}\left\{d(x,a) + \liminf_{n\to\infty}\alpha_n\left(V_{\alpha_n}^b(x-a) - V_{\alpha_n}^b(0)\right)\right\}. \end{aligned}$$

Die erste Aussage ergibt sich somit aus dem ersten Teil des letzten Korollars. Der zweite Teil des Korollars führt zu der zweiten Aussage dieses Satzes auf Grund der ähnlichen Gleichungskette

$$\begin{aligned}
& d(x,\delta_{x^*}(x)) + \liminf_{n\to\infty} \left(\alpha_n \left(V_{\alpha_n}(i-\delta_{x^*}(x)) - V_{\alpha_n}(0)\right)\right) \\
= & \liminf_{n\to\infty} \min_{a\in[0,x]} \left\{d(x,a) + \alpha_n \left(V_{\alpha_n}(x-a) - V_{\alpha_n}(0)\right)\right\} \quad F_z - f.s. \quad \forall z \in I \\
= & \liminf_{n\to\infty} \min_{a\in\{0,x\}} \left\{d(x,a) + \alpha_n \left(V_{\alpha_n}(x-a) - V_{\alpha_n}(0)\right)\right\} \\
= & \min_{a\in\{0,x\}} \left\{d(x,a) + \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \left(V_{\alpha_n}(x-a) - V_{\alpha_n}(0)\right)\right\} \\
= & \min_{a\in[0,x]} \left\{d(x,a) + \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \left(V_{\alpha_n}(x-a) - V_{\alpha_n}(0)\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Die Vertauschbarkeit von $\min_{a\in\{0,x\}}$ mit $\min_{a\in[0,x]}$ ist möglich, weil die Funktionen $d(y,a) + \alpha_n h_n(y-a)$ und $\liminf_{n\to\infty}\{d(y,a) + h_n(y-a)\}$ konkav sind, wie im Beweis von Satz 42 gezeigt wurde. ■

Der Zustandsraum $I = [0,N]$ für $N < \infty$ kann auch aus dem ehemaligen Zustandsraum $I = I\!R^+$ entstanden sein, indem der Zustandsbereich $[N,\infty)$ zum Zustand $\{N\}$ verschmolzen wurde, da z.B. die Kostenfunktionen auf $[N,\infty)$ konstant sind. In diesem Fall ist es sinnvoll, die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{xN} = P(X_1^- = N | X_0 = x) = P(\tilde{X}_1^- = N | \tilde{X}_0 = x)$$

einzuführen, wobei $(\tilde{X}_n)_{n\in N}$ den alten Prozeß auf $I\!R^+$ darstellt. Wenn alle alten Übergangsverteilungen F_x, $x \in [0,N]$ eine auf $[x,\infty)$ nirgends verschwindende Dichte haben, dann sind diese neuen Übergangswahrscheinlichkeiten alle von 0 verschieden. In so einem Fall zeigt der folgende Satz, wie Durchschnittskosten berechnet werden können:

Satz 44 *Der Zustandsraum sei $[0,N]$ für ein $N \in I\!R^+$ und der Zustand N sei insofern ausgezeichnet, daß er mit positiver Wahrscheinlichkeit von jedem Zustand aus erreicht werden kann:*

$$p_{xN} := F_x(N) - F_x^-(N) > 0. \quad \textit{Außerdem sei} \inf_{\{x\in[0,N]\}}\{p_{xN}\} > 0.$$

Nun sei $\tilde{V}_\alpha$ ($\tilde{V}_\alpha^b$) die (in Π_2^b) optimale Wertfunktion des Systems mit den Größen

$$\tilde{r} := r,\ \tilde{d} := d(1-\alpha),\ \tilde{p}_{xN} := \frac{p_{xN}-\alpha}{1-\alpha},\ \tilde{F}_x|[0,N) := \frac{F_x}{1-\alpha}.$$

Mit $\alpha := \inf_{x\in[0,N]}\{p_{xN}\}$ gelten die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned}
\phi &= \alpha \inf_{z\in[0,N]} \left\{d(N,z) + \tilde{V}_{1-\alpha}(N-z)\right\}, \\
\phi^b &= \alpha \inf_{z\in\{0,N\}} \left\{d(N,z) + \tilde{V}_{1-\alpha}^b(N-z)\right\}, \\
\phi_\delta &= \alpha \cdot \left\{d(N,\delta(N)) + \tilde{V}_{\delta,1-\alpha}(N-\delta(N))\right\}.
\end{aligned}$$

Beweis: Zunächst einmal ist $\tilde{F}$ eine Verteilungsfunktion auf $[0, N]$, denn $\tilde{F}(0) = 0$,

$$\tilde{F}_x(N) = \tilde{F}_x(N-) + \tilde{p}_{xN} = \frac{F_x(N-)}{1-\alpha} + \frac{p_{xN} - \alpha}{1-\alpha} = \frac{1 - p_{xN}}{1-\alpha} + \frac{p_{xN} - \alpha}{1-\alpha} = 1$$

und Monotonie- und Stetigkeitseigenschaften übertragen sich direkt von F. Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_{1-\alpha}(x) &= \tilde{r}(x) + \int_x^N \inf_{\{z \in [0,y]\}} \left\{ \tilde{d}(y,z) + (1-\alpha)\tilde{V}_{1-\alpha}(y-z) \right\} \, d\tilde{F}_x(y) \\
& \quad r(x) + \int_x^N \inf_{\{z \in [0,y]\}} \left\{ (1-\alpha)d(y,z) + (1-\alpha)\tilde{V}_{1-\alpha}(y-z) \right\} d\frac{F_x(y)}{1-\alpha} \\
& \quad - \frac{\alpha}{1-\alpha} \inf_{\{z \in [0,N]\}} \left\{ (1-\alpha)d(N,z) + (1-\alpha)\tilde{V}_{1-\alpha}(N-z) \right\}.
\end{aligned}$$

Somit folgt $\alpha \inf_{\{z \in [0,N]\}} \left\{ d(N,z) + \tilde{V}_{1-\alpha}(N-z) \right\} + \tilde{V}_{1-\alpha}(x)$

$$= r(x) + \int_x^N \inf_{\{z \in [0,y]\}} \left\{ d(y,z) + \tilde{V}_{1-\alpha}(y-z) \right\} \, dF_x(y).$$

$\tilde{V}_{1-\alpha}$ ist wegen beschränkter Kostenfunktionen r und d beschränkt. Darum ist der Satz 42 mit $g = \alpha \inf_{\{z \in [0,N]\}} \left\{ d(N < z) + \tilde{V}_{1-\alpha}(N-z) \right\}$ und $h = \tilde{V}_{1-\alpha}$ anwendbar. ■

Nun sei auch wieder $N = \infty$ möglich: Gibt es auch in diesem Modell einen ausgezeichneten Zustand x_0, der von der Strategie δ bei jedem Anfangswert in erwarteter endlicher Zeit erreicht wird, folgt auch hier, daß ϕ_δ konstant ist. Dieser Sachverhalt wird genauer in dem folgenden, zum diskreten Fall einschließlich Beweis analogen Satz formuliert. Dabei seien die Funktionen τ^δ, τ_m^δ und $\tau_\geq^\delta$ nun auf den überabzählbaren Zustandsraum I erweitert. Außerdem sei

$$K_{x_0}^\delta := \left\{ y \in I\!R^+ \middle| E(\tau^\delta(y))|X_0 = x_0) < \infty \right\} \quad \forall x_0 \in I\!R^+.$$

Lemma 32 *Aus $\cap_{x \in I} K_x^\delta \neq \emptyset$ folgt für $y \in \cap_{x \in R^+} K_x^\delta$ und $x \in I$:*

$$\phi_\delta(x) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N+1} E_\delta \left(\sum_{k=0}^N c(X_k) \middle| X_0 = x \right) = \frac{E_\delta \left(\sum_{n=0}^{\tau^\delta(y)-1} c(X_n) \middle| X_0 = y \right)}{E(\tau^\delta(y)|X_0 = y)},$$

so daß ϕ konstant ist.

Auch hier läßt sich das Lemma ebenfalls auf die Klasse Π_2^b beziehen.

Korollar 13 *Ist δ eine bang-bang-Stategie mit Schwellenwert x_δ^* und existiert ein $\epsilon > 0$ mit $\sup_{\{x \leq x_\delta^*\}} \{F_x(x+\epsilon)\} < 1$, dann ist ϕ_δ konstant.*

Beweis: Wegen der Bedingung, die an die Familie der Verteilungsfunktionen gestellt wurde, überschreitet der Prozeß mit Wahrscheinlichkeit 1 in endlicher Zeit den Schwellenwert i^*, unabhängig vom Ursprungszustand $X_0 = x_\delta^*$. Also existiert ein $n_0 \in I\!N$ mit $P(X_{n_0}^- \geq x_0) = 1$. Daraus ergibt sich $P(X_{n_0+1} = 0) = 1$. Deshalb ist jedes x_0 in K^δ enthalten. Somit stimmt K^δ mit I überein und die Aussage des Satzes folgt aus dem letzten Lemma.

Korollar 14 *Existiert ein* $\epsilon > 0$ *mit* $\sup_{\{x \in R^+\}}\{F_x(x+\epsilon)\} < 1$, *dann ist* ϕ^b_δ *konstant.*

Wie schon das Beispiel im diskreten Fall vermuten läßt, gibt es auch im stetigen Fall ein Gegenbeispiel für die Annahme, daß ϕ_δ für alle Strategien δ konstant sei:

Es sei $h > 0$, $F_{hx}(\lfloor h \cdot x \rfloor) = 1$ und $\delta(h \cdot x) = h \cdot x - \lceil h \cdot x \rceil \quad \forall x \in I\!R^+$.

In diesem Fall ist $\phi_\delta(h \cdot x) = r(\lceil h \cdot x \rceil) + \int_0^1 d(\lceil h \cdot x \rceil + y, y)\, dF_{\lceil h \cdot x \rceil}(h \cdot (\lceil x \rceil + y))$.

Diese Funktion ist eine Treppenfunktion auf $I\!R^+$ mit Sprüngen in $hI\!N$.

Unter den Voraussetzungen $(1), ..., (8)$ ist nach Satz 43 eine bang-bang Strategie optimal im gesamten Raum Π_2 und somit $\phi^b = \phi$. Daher ist nach Korollar 13 in diesem Fall unter der Bedingung $\sup_{\{x \in I\}} F_x(x+\epsilon) < 0$ für ein $\epsilon > 0$ die optimale Wertfunktion konstant, und wegen $\lim_{\alpha \to 1}(1-\alpha)V_\alpha(i) = \phi(i)$ gilt für ϕ auf Grund des Korollars 11 die folgende Abschätzung:

$$\left(r(0) + \int_0^\infty d(y,0)\, dF_0(y)\right) \le \phi \le \left(r(0) + \int_0^\infty d(y,y)\, dF_0(y)\right) = r(0) + E_{\delta_0}(Z).$$

Kapitel 4

Das Ersetzungsproblem mit konstanten Wartungszeiten

Nun ist wieder ein endlicher Zustandsraum $I = \{0, ..., N\}$ für die Beschreibung des Maschinenzustandes gegeben. Die Übergangswahrscheinlichkeiten $(p_{ij})_{(i,j)\in I^2}$ erfüllen (erneut) die Bedingung $p_{ij} = 0$ für alle j kleiner als i und die schon im ersten Kapitel vorgestellte Markovsche Bedingung: die Summe $\sum_{j=k}^{N} p_{ij}$ ist monoton nicht-fallend in i für alle k aus I. Des weiteren seien alle Wahrscheinlichkeiten p_{ii} kleiner als eins und die Wahrscheinlichkeit p_{0N} größer als null. Wegen der Markovschen Bedingung sind dann auch alle Wahrscheinlichkeiten p_{iN} größer als null. Ohne Berücksichtigung von Kosten soll die Reparatur-freie erwartete Laufzeit der Maschine, die nach jedem Zeitintervall ersetzt werden kann, durch eine optimale Wahl der Strategie δ maximiert werden. Die einzigen Restriktionen sind die, daß der Anteil der Neuersetzungen, bei denen ein System im kritischen Zustand N ersetzt wird, nur kleinergleich einem vorgegebenen reellen positiven ϵ_0 sein darf und eine Maschine im kritischen Zustand N ersetzt werden muß. Das ϵ_0 ist ein Wert, der von außen an das System herangetragen wird, z.B. durch staatliche Gesetze: Angenommen, die ausgetauschten Maschinen müßten entsorgt werden und Maschinen im Zustand N würden ein Umweltproblem darstellen, dann wäre es möglich, daß der Gesetzgeber verlangt, daß nur $100 \cdot \epsilon_0\%$ dieser Maschinen die Umwelt belasten dürfen. Außerdem ist zu beachten, daß hier als 'Maschinen' bezeichnete Objekte nicht unbedingt reale Maschinen sein müssen, sondern wie im Beispiel des Maschinenöls mit Metallpartikeln am Anfang dieser Arbeit Stoffe sein können.

In der Einleitung wurde die Identifizierung dieser Modelle mit einem $N-$Komponenten System erwähnt, bei dem der Systemzustand die Anzahl der ausgefallenen Komponenten angibt. Dies ist hier in besonderem Maße möglich, wenn man an ein System mit einer parallelen Struktur denkt. Bei so einem System reicht zum Betrieb das Funktionieren einer Komponente aus. Der kritische Zustand N ist dann mit einem Systemausfall gleichzusetzen. Dieser Gedanke kann verallgemeinert werden: man betrachte ein m-out-of-M-System, ein $M-$Komponenten System, bei dem mindestens m

funktionierende Komponenten zum Betrieb notwendig sind. Nun sei $N = M - m + 1$. Der Zustand N erhält im Gegensatz zu den anderen Zuständen eine andere Bedeutung und zwar diejenige, daß **mindestens** N Komponenten ausgefallen sind. Wie schon vorher für den Fall $M = \infty$ gezeigt, überträgt sich die Markovsche Bedingung der Übergangswahrscheinlichkeiten $(p_{ij})_{\{i,j \in \{0,...,M\}\}}$ auf die Übergangswahrscheinlichkeiten $(\tilde{p}_{ij})_{\{i,j \in \{0,...,N\}\}}$ dieses Modells mit $\tilde{p}_{ij} := p_{ij}$ für $i,\ j \in \{0, ..., N-1\}$, $\tilde{p}_{iN} := \sum_{j=N}^{M} p_{ij}$ für $i \in \{0, ..., N\}$ und $\tilde{p}_{ij} = 0$ sonst. Erneut identifiziert der Zustand N den Systemausfall. Um auf das hier behandelte Modell zurückzukommen, dürfen nur $100 \cdot \epsilon_0\%$ der ausgetauschten Maschinen ausgefallen sein.

Teil-Reparaturen zuzulassen ist bei dieser Art der Optimierung nicht sinnvoll, da es keine Reparaturkosten gibt, die dadurch verringert werden könnten. Stattdessen würden nur die zu maximierenden Zykluslängen der Maschinen verringert. Unter einem Zyklus ist natürlich die Zeit zwischen zwei Reparaturen zu verstehen.

Die Prozesse $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ und $(X_n^-)_{n \in N}$ haben die gleiche Bedeutung wie im ersten Modell dieser Arbeit. Wegen $p_{ii} < 1$ und $p_{ij} = 0$ für alle $i, j \in I,\ j < i$ und der Restriktion, daß ein System im kritischen Zustand N auf jeden Fall ersetzt werden muß, ist der Zustand 0 bzgl. des Prozesses $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ unter jeder Ersetzungsstrategie positiv rekurrent und von jedem Zustand aus mit positiver Wahrscheinlichkeit zu erreichen. Somit ist I irreduzibel. Also existieren unter Verwendung der Strategie δ die stationären Wahrscheinlichkeiten $\pi_\delta(0),\ \pi_\delta(1), ..., \pi_\delta(N)$ des stochastischen Prozesses $(X_n)_{n \in N}$, und sie sind eindeutig. Die stationären Wahrscheinlichkeiten der transienten Zustände sind natürlich 0. Auf Grund der Identitäten

$$\tilde{\pi}_\delta(j) \quad = \quad \sum_{i=0}^{j} \pi_\delta(i) p_{ij}, \qquad i, j \in I,$$

gilt dies dann auch für die stationären Wahrscheinlichkeiten $\tilde{\pi}_\delta(0),\ \tilde{\pi}_\delta(1), ..., \tilde{\pi}_\delta(N)$ des Prozesses $(X_n^-)_{n \in N}$. Die erwartete Zeit zwischen zwei Neuersetzungen ist dann offensichtlich gleich $\frac{1}{\pi_\delta(0)(1-p_{00})}$, denn $\pi_\delta(0)(1 - p_{00})$ ist die erwartete relative Häufigkeit des Auftretens des Zustandes 0 unter der Strategie δ, wobei Aufenthalte vom Zustand 0 kommend nicht mitgerechnet werden (in diesem Fall gab es keine Erneuerung). Das Problem kann nun folgendermaßen umformuliert werden: Gesucht ist eine Strategie $\delta \in \Pi_3 := \{\delta | P(\delta(i) = i) + P(\delta(i) = 0) = 1,\ \delta(N) = N\}$, die $\pi_\delta(0)(1 - p_{00})$ minimiert und die die Nebenbedingung $\frac{\tilde{\pi}_\delta(N)}{\pi_\delta(0)(1-p_{00})} \leq \epsilon_0$ einhält, denn wie als nächstes gezeigt wird, entspricht der letzte Bruch dem Term $P_\delta(X_n^- = N | X_n = 0, X_n^- \neq 0)$. Dies ist gerade die Wahrscheinlichkeit, daß eine Neuersetzung (das Ereignis $\{X_n = 0,\ X_n^- \neq 0\}$) durch einen Ausfall (das Ereignis $\{X_n^- = N\}$) verursacht wurde. Zunächst wird die Wahrscheinlichkeit $P_\delta(X_n = N)$ berechnet. Bei der zweiten Gleichung sollte die Identität

$$\{X_n = 0,\ X_n^- = 0\} = \{X_{n-1} = 0,\ X_n^- = 0,\ X_n = 0\} = \{X_{n-1} = 0,\ X_n^- = 0\}$$

beachtet werden:

$$\begin{aligned}P_\delta(X_n = 0) &= P_\delta(X_n = 0,\, X_n^- = 0) + P_\delta(X_n = 0,\, X_n^- \neq 0)\\ &= P_\delta(X_{n-1} = 0, X_n^- = 0) + P_\delta(X_n = 0,\, X_n^- \neq 0).\\ \text{Somit gilt } \pi_\delta(0) &= \pi_\delta(0)p_{00} + P_\delta(X_n = 0,\, X_n^- \neq 0).\end{aligned}$$

Es ergibt sich $P_\delta(X_n = 0,\, X_n^- \neq 0) = \pi_\delta(0)(1-p_{00})$.

Mit Hilfe dieser Identität $(*)$ kann nun die gewünschte Wahrscheinlichkeit berechnet werden. Es folgt aus $\{X_n^- = N\} \subset \{X_n = 0\, X_n^- \neq 0\}$ die Identität

$$P_\delta(X_n^- = N | X_n = 0,\, X_n^- \neq 0) = \frac{P_\delta(X_n^- = N)}{P_\delta(X_n = 0,\, X_n^- \neq 0)} \overset{(*)}{=} \frac{\tilde{\pi}_\delta(N)}{\pi_\delta(0)(1-p_{00})}.$$

Im weiteren Verlauf sei $\epsilon_1 := \epsilon_0(1-p_{00})$. Als erstes wird ein einfacher Existenzsatz zu diesem Problem angegeben:

Satz 45 *Es existiert genau dann eine Strategie δ, die der Bedingung $\frac{\tilde{\pi}_\delta(N)}{\pi_\delta(0)} \leq \epsilon_1$ genügt, wenn die folgende Ungleichung gilt:*

$$p_{0N} \leq \epsilon_1.$$

Beweis: $\tilde{\pi}_\delta(N) = \sum_{i=0}^N \pi_\delta(i)p_{iN} \; = \; \pi_\delta(0)p_{0N} + \sum_{i=1}^N \pi_\delta(i)p_{iN}$.
Der letzte Summand ist nicht-negativ und verschwindet, wenn als Strategie δ die bang-bang Strategie mit Schwellenwert 1 gewählt wird. Daraus folgt

$$\frac{\tilde{\pi}_{\delta_1}(N)}{\pi_{\delta_1}(0)} = p_{0N} \leq \frac{\tilde{\pi}_\delta(N)}{\pi_\delta(0)} \;\forall \delta \in \Pi_1 \supset \Pi_3.$$

Diese Aussage beweist beide Richtungen: die Ungleichung $p_{0N} \leq \epsilon_1$ ergibt die Ungleichung $\frac{\tilde{\pi}_{\delta_1}(N)}{\pi_{\delta_1}(0)} \leq \epsilon_1$ und aus der Existenz einer Strategie δ mit $\frac{\tilde{\pi}_\delta(N)}{\pi_\delta(0)} \leq \epsilon_1$ folgt $p_{0N} \leq \epsilon_1$. ■

Nun werden die für dieses Modell wichtigen Strategien benannt:

Definition 11 *Bei einer pre-randomisierten bang-bang Strategie mit Parameter $(i^*, p) \in I \times [0,1]$ wird mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ durchgehend die bang-bang Strategie mit Schwellenwert i^* und mit Wahrscheinlichkeit p durchgehend die bang-bang Strategie mit Schwellenwert i^*+1 gewählt. Diese Strategie wird mit dem Parameter $(i^*, p)_{pre}$ identifiziert.*
Eine post-randomisierte bang-bang Strategie $\delta_{(i^*,p)_{post}}$ ist im Gegensatz zur pre-randomisierten bang-bang Strategie nicht deterministisch: Wird durch die Inspektion ermittelt, daß der Zustand des Systems ein Element aus der Menge $\{i^*+1, ..., N\}$ ist, wird das System ersetzt. Ist der bei einer Inspektion ermittelte Wert dagegen i^*, wird ein von der Vergangenheit unabhängiges Bernoulli-Experiment mit Parameter p durchgeführt. Bei

Mißerfolg wird das System ersetzt und bei Erfolg nicht. Ebenfalls nicht ersetzt wird, wenn der Zustand einen Wert aus der Menge $\{0, ..., i^* - 1\}$ *annimmt. Diese Strategie wird auch als post-randomisierte bang-bang Strategie erster Art bezeichnet, und die hierzu leicht variierte Strategie* $\delta_{(i^*,p)_{post(2)}}$ *heißt die post-randomisierte bang-bang Strategie zweiter Art: Wenn der Zustand* i^* *mehrmals hintereinander auftritt, wird auf die wiederholte Anwendung eines Bernoulli-Experimentes verzichtet: Zwischen zwei Neuersetzungen wird im Gegensatz zur post-randomisierten bang-bang Strategie erster Art derselbe Schwellenwert verwendet. Letztlich wird noch die bang-bang Strategie dritter Art* $\delta_{(i^*,p)_{\text{post}(3)}}$ *vorgestellt, die aber nicht näher untersucht, sondern nur beim Beweis von Lemma 36 benötigt wird: Diese Strategie verhält sich von einer Neuersetzung bis einschließlich zum nächsten Besuch des Prozesses* $(X_n^-)_{n \in N}$ *in* i^* *wie die bang-bang Strategie mit Schwellenwert* $i^* + 1$*. Von diesem Zeitpunkt an bis zur nächsten Neuersetzung verhält sich die Strategie wie die Strategie* $\delta_{(i^*,p)_{\text{post}}}$*. Entfällt der Besuch, gibt es zwischen der Strategie* $\delta_{(i^*,p)_{\text{post}(3)}}$ *und der Strategie* δ_{i^*+1} *keinen Unterschied mehr. Es wird unter der Strategie* $\delta_{(i^*,p)_{\text{post}(3)}}$ *folglich meistens die Strategie* δ_{i^*+1} *verwendet. Nur Maschinen, die den Zustand* i^* *erreichen, erhalten von da an die Reparaturstrategie* $\delta_{(i^*,p)_{\text{post}}}$.

Bei einer pre-randomisierten bang-bang Strategie wird vor dem Durchlauf der Schwellenwert stochastisch aus zwei Möglichkeiten durch die Ausführung eines Bernoulli-Experimentes ermittelt, während bei den post-randomisierten bang-bang Strategien die stochastische Ermittlung während des Durchlaufes immer wieder erfolgt.

Als nächstes wird das Ersetzungs-Modell mit dem gleichen Zustandsraum I, den gleichen Übergangswahrscheinlichkeiten $(p_{ij})_{i,j \in N}$ und für ein festes, reelles, nicht-negatives c mit den folgenden Ersetzungskosten betrachtet:

$$d(i,0) = 0 \quad \forall i \in I, \qquad d(i,i) = 1 \quad \forall i \in \{1, ..., N-1\}, \qquad d(N,N) = 1 + c.$$

Diese Kostenfunktion d ist von dem ersten Modell übernommen worden. Mit der weiteren Definition $r \equiv 0$ handelt es sich hier also genau um so ein Modell, wie es als erstes in dieser Arbeit behandelt wurde. Die besondere Restriktion dieses Ersetzungsmodells ($\frac{\tilde{\pi}_\delta(N)}{\pi_\delta(0)} \leq \epsilon_1$) wird hier nicht beachtet, es handelt sich eben um ein reines Kostenmodell. Nach Derman [8], S.125 ist wegen der Monotonie der Kostenfunktion d und der Eigenschaften der Übergangswahrscheinlichkeiten die Durchschnittskosten-optimale Strategie δ^* dieses Ersetzungs-Problems eine Kontrollgrenzenstrategie.

Definition 12 $\phi_{i^*}(c)$ *sei die Durchschnittskostenfunktion dieses Ersetzungs-Problems unter Verwendung der Kontrollgrenzenstrategie mit Schwellenwert* i^* *in Abhängigkeit von dem Wert* c.
$(\tilde{q}_{ij}^{i^*})_{(i,j) \in I^2}$ *und* $(q_{ij}^{i^*})_{(i,j) \in I^2}$ *seien die Übergangswahrscheinlichkeiten der Prozesse* X^-

und X unter Verwendung der Kontrollgrenzenstrategie mit Schwellenwert i^*.
$(\tilde{\pi}_{i^*}(j) = \tilde{\pi}_{\delta_{i^*}}(j))_{j\in\{0,...,N\}}$ *bzw.* $(\pi_{i^*}(j) = \pi_{\delta_{i^*}}(j))_{j\in\{0,...,N\}}$ *seien wiederum die stationären Wahrscheinlichkeiten der Prozesse* $X_{i^*}^- = \left(X_n^{\delta_{i^*},-}\right)_{n\in N}$ *und* $X_{i^*} = \left(X_n^{\delta_{i^*}}\right)_{n\in N}$ *unter Verwendung der Kontrollgrenzenstrategie mit Schwellenwert i^*.*
Entsprechend seien die Funktionen $\phi_{(i^*,p)_{pre}}$, $\phi_{(i^*,p)_{post}}$ *und* $\phi_{(i^*,p)_{post(2)}}$ *und die Wahrscheinlichkeiten* $(q_{ij}^{(i^*,p)_{pre}})_{(i,j)\in I^2}$, $(q_{ij}^{(i^*,p)_{post}})_{(i,j)\in I^2}$ *und* $(q_{ij}^{(i^*,p)_{post(2)}})_{(i,j)\in I^2}$; $(\tilde{\pi}_{(i^*,p)_{pre}}(j))_{j\in I}$, $(\tilde{\pi}_{(i^*,p)_{post}}(j))_{j\in I}$ *und* $(\tilde{\pi}_{(i^*,p)_{post(2)}}(j))_{j\in I}$ *definiert.*

$$\text{Es gilt die Identität}\quad \phi_{i^*}(c) = \pi_{i^*}(0)(1-p_{00}) + c\tilde{\pi}_{i^*}(N) = \pi_{i^*}(0)\left(1 - p_{00} + c\frac{\tilde{\pi}_{i^*}(N)}{\pi_{i^*}(0)}\right)$$
$$\text{bzw. } \phi_{i^*}(c) = \sum_{i=i^*}^{N} \tilde{\pi}_{i^*}(i) + c\tilde{\pi}_{i^*}(N).$$

ϕ_{i^*} ist somit offensichtlich stetig auf $I\!R^+$.

Lemma 33

1. *Die stationäre Wahrscheinlichkeit $\pi_{i^*}(0)$ ist monoton nicht-wachsend in i^** $(\pi_{i^*}(0) \downarrow (i^*))$.
2. *Die stationäre Wahrscheinlichkeit $\pi_{i^*}(N)$ ist monoton nicht-fallend in i^** $(\pi_{i^*}(N) \uparrow (i^*))$.
3. *Die Identität $\tilde{\pi}_{i^*}(N) = \tilde{\pi}_{i^*+1}(N)$ ergibt: es gilt $\pi_{i^*}(i) = \pi_{i^*+1}(i)$ oder $p_{0N} = p_{1N} = ... = p_{i^*N}$ (kein ausschließendes 'oder').*
4. *Die stationären Wahrscheinlichkeiten $\pi_{(i^*,p)_{p...}}$ sind monoton nicht-wachsend und stetig in p auf $[0,1]$ für jeden Schwellenwert i^*. $p...$ steht für pre, post, post(2).*

Beweis: Für $A, B \subset I$ sei

$$A \overset{\geq n}{\Rightarrow} B \ := \ \{X_0^{\delta_\infty} \in A,\, X_1^{\delta_\infty} \notin B, ..., X_{n-1}^{\delta_\infty} \notin B,\, \exists m \geq n:\ X_m^{\delta_\infty} \in B\}$$
$$\text{und } T(i) \ := \ \inf\{n \in I\!N:\ X_n = i \,|\, X_0 = i\} \quad \text{Stopzeit bzgl. } (X_n)_{n\in N}.$$

$q_{ij}^n(i^*)$ sei die Wahrscheinlichkeit, daß der Prozeß $(X_n)_{n\in N}$ unter der bang-bang Strategie mit Schwellenwert i^* in mindestens n Schritten zum ersten Mal von i nach j gelangt, und p_{ij}^n seien die Übergangswahrscheinlichkeiten der Matrix P^n mit $P = (p_{ij})_{(i,j)\in I^2}$. Aus der Forderung $p_{ii} \neq 0$ und $p_{ij} = 0\ \forall i,j \in I$ mit $j < i$ folgt, daß der Prozeß $(X_n^{\delta_\infty})_{n\in N}$ im Falle eines Aufenthaltes im Zustand i^* einen Besuch in der Zustandsmenge $\{i^*+1, ..., N\}$ in endlicher Zeit folgen läßt. Somit gilt:

$$\{\{i\} \overset{\geq n}{\Rightarrow} \{i^*, i^*+1, ..., N\}\} \quad \subset \quad \{\{i\} \overset{\geq n}{\Rightarrow} \{i^*+1, i^*+2, ..., N\}\},$$
$$\Rightarrow\ P\left(\{i\} \overset{\geq n}{\Rightarrow} \{i^*, i^*+1, ..., N\}\right) \quad \leq \quad P\left(\{i\} \overset{\geq n}{\Rightarrow} \{i^*+1, i^*+2, ..., N\}\right),$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\ & q_{i0}^n(i^*) \le q_{i0}^n(i^*+1) \quad \forall n \in I\!N, \\
\Rightarrow\ & q_{ii}^n(i^*) = \sum_{m=1}^{n-1} q_{i0}^m(i^*) P\left(X_n = i,\, X_{n-1} \neq i, ..., X_{m+1} \neq i | X_m = 0\right) \\
& \qquad + \sum_{m=n}^{\infty} P\left(X_m = i,\, X_{m-1} \neq i, ..., X_1 \neq i | X_0 = 0\right) \quad (*) \\
& \qquad \le \sum_{m=1}^{n-1} q_{i0}^m(i^*+1) P\left(X_n = i,\, X_{n-1} \neq i, ..., X_{m+1} \neq i | X_m = 0\right) \\
& \qquad + \sum_{m=n}^{\infty} P\left(X_m = i,\, X_{m-1} \neq i, ..., X_1 \neq i | X_0 = 0\right) = q_{ii}^n(i^*+1),
\end{aligned}
$$

denn $q_{ii}^n(i^*)$ ist die Wahrscheinlichkeit, unter der bang-bang Strategie mit Schwellenwert i^* vom Zustand i in den Zustand i über einen von i verschiedenen Zustand erstmals in mindestens n Schritten zu gelangen: dies impliziert in der Zwischenzeit einen Besuch im Zustand 0, und somit ergibt sich die Identität $(*)$ aus der folgenden allgemeinen Überlegung: Die Zufallsvariable Z gebe die Anzahl der Schritte bis zu dem ersten Besuch in 0 an und die Zufallsvariable Y die Anzahl der Schritte bis zum anschließend ersten Besuch in i. Dann folgt:

$$
\begin{aligned}
P(Z+Y \ge m) &= \sum_{k=1}^{m-1} P(Z+Y \ge m,\, Y=k) + P(Y \ge m) \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} P(Z \ge m-k,\, Y=k) + P(Y \ge m).
\end{aligned}
$$

Die gezeigte Monotonie von $q_{ii}^n(i^*)$ in i^* führt schließlich zu

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi_{i^*}(i)} &= E_{\delta_{i^*}}(T(i)) = \sum_{n\in N} P_{\delta_{i^*}}(T(i) \ge n) = \sum_{n \in N} q_{ii}^n(i^*) \\
&\le \sum_{n\in N} q_{ii}^n(i^*+1) = E_{\delta_{i^*+1}}(T(i)) = \frac{1}{\pi_{i^*+1}(i)} \ \forall i < i^*.
\end{aligned}
$$

Damit ist gezeigt, daß die Wahrscheinlichkeit $\pi_{i^*}(i)$ monoton nicht-wachsend in $i^* > i$ ist.

Für alle $i < i^*$ existieren also Werte $a_{i^*}(i) \ge 0$ mit $\pi_{i^*}(i) = \pi_{i^*+1}(i) + a_{i^*}(i)$. Dies führt unmittelbar zu der Identität

$$
\begin{aligned}
1 = \sum_{i=0}^{i^*-1} \pi_{i^*}(i) &= \sum_{i=0}^{i^*-1} \pi_{i^*+1}(i) + \sum_{i=0}^{i^*-1} a_{i^*}(i) = 1 - \pi_{i^*+1}(i^*) + \sum_{i=0}^{i^*-1} a_{i^*}(i), \\
\text{so daß } \pi_{i^*+1}(i^*) &= \sum_{i=0}^{i^*-1} a_{i^*}(i) \quad (**) \quad \text{gilt. Außerdem ist} \\
\tilde{\pi}_{i^*}(N) &= \sum_{i=0}^{i^*-1} \pi_{i^*}(i) p_{iN} = \sum_{i=0}^{i^*-1} \pi_{i^*+1}(i) p_{iN} + \sum_{i=0}^{i^*-1} a_{i^*}(i) p_{iN}
\end{aligned}
$$

$$\leq \sum_{i=0}^{i^*-1} \pi_{i^*+1}(i)p_{iN} + p_{i^*N} \sum_{i=0}^{i^*-1} a_{i^*}(i) \quad \text{da} \quad p_{iN} = \sum_{k=N}^{N} p_{ik} \uparrow (i)$$

$$\overset{(**)}{=} \sum_{i=0}^{i^*-1} \pi_{i^*+1}(i)p_{iN} + p_{i^*N}\pi_{i^*+1}(i^*) = \sum_{i=0}^{i^*} \pi_{i^*+1}(i)p_{iN} = \tilde{\pi}_{i^*+1}(N).$$

Damit ist ebenfalls gezeigt, daß $\tilde{\pi}_{i^*}(N)$ monoton nicht-fallend in i^* ist.

Nun wird der dritte Teil des Lemmas gezeigt: Gilt die Identität $\tilde{\pi}_{i^*}(N) = \tilde{\pi}_{i^*+1}(N)$, handelt es sich bei der zuletzt gezeigten Ungleichung um eine Gleichung, so daß

$$\sum_{i=0}^{i^*-1} a_{i^*}(i)p_{i^*N} = \sum_{i=0}^{i^*-1} a_{i^*}(i)p_{i,N}$$

gilt. Wegen $p_{iN} \leq p_{i^*N}$ $\forall i \in \{0,...,i^*-1\}$ gilt für alle $i \in \{0,...,i^*-1\}$ $a_{i^*}(i) = 0$ und damit $\pi_{i^*}(i) = \pi_{i^*+1}(i)$ oder $p_{iN} = p_{i+1,N} = ... = p_{i^*N}$ und damit $p_{0N} = p_{1N} = ... = p_{i^*N}$. Auf diese Weise ist auch die dritte Aussage gezeigt, und zuletzt wird sich mit der vierten befaßt:

Es gilt für alle $j \in \{1,...,i^*-1\}$, $i \in \{0,...,i^*\}$: $q_{ij}^{(i^*,p)_{post}} = p_{ij}$, $q_{i,i^*}^{(i^*,p)_{post}} = p \cdot p_{i,i^*}$

$$\text{und } q_{i0}^{(i^*,p)_{post}} = p_{i0} + (1-p)\sum_{k=i^*}^{N} p_{ik} + p\sum_{k=i^*+1}^{N} p_{ik}, \text{ so daß } \pi_{(i^*,p)_{post}}(0) \downarrow (p) \text{ gilt.}$$

Letzteres ist deswegen der Fall, weil die Wahrscheinlichkeit $\pi_{(i^*,p)_{post}}(0)$ der Kehrwert der erwarteten Zeitdauer ist, die der Prozeß $(X_n)_{n\in N}$ unter der Strategie mit Parameter $(i^*,p)_{\text{post}}$ benötigt, vom Zustand 0 erstmals wieder in den Zustand 0 zu gelangen: Mit zunehmendem Wert p wird die Wahrscheinlichkeit $q_{i,0}^{(i^*,p)_{\text{post}}}$ nicht größer und die Wahrscheinlichkeit $q_{i,i^*}^{(i^*,p)_{\text{post}}}$ nicht kleiner für alle $i \in \{0,...,i^*-1\}$. Die Werte $q_{ij}^{(i^*,p)_{\text{post}}} = p_{ij}$ verändern sich dagegen nicht. Somit nimmt diese erwartete Zeitdauer nicht zu. Dies hat zur Folge, daß die Wahrscheinlichkeit $\pi_{(i^*,p)_{post}}(0)$ monoton nicht-wachsend in p ist. Die gleiche Argumentation gilt auch für die Wahrscheinlichkeit $\pi_{(i^*,p)_{post(2)}}(0)$, da die Wahrscheinlichkeit q_{i,i^*}^{δ} für beide Strategien δ und $i \in \{0,...,i^*-1\}$ identisch ist. Außerdem ist klar, daß die Wahrscheinlichkeiten $q_{ij}^{(i^*,p)_{post}}$ für alle Zustände $i,j \in I$ in p stetig sind. $Q^{(i^*,p)_{post}}$ sei nun die $(i^*+1)-$quadratische Matrix mit den Elementen $(q_{ji}^{(i^*,p)_{post}})_{(i,j)\in I^2}$. Wie schon erwähnt, ist die endliche Menge I unter jeder Strategie $\delta \in \Pi_3$ irreduzibel. Daher gibt es genau eine stochastische Lösung $\pi_{(i^*,p)_{post}} =: x \in I\!R^{i^*+1}$ des LGS

$$\begin{pmatrix} Q^{(i^*,p)_{post}} & - & E_{i^*+1} \\ & & \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_{(i^*,p)_{post}}(0) \\ \vdots \\ \pi_{(i^*,p)_{post}}(i^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d.h. $0 \leq x_i \leq 1$ mit $x = (x_1,...,x_n)$. Die Bedingung $\sum_i x_i = 1$ ist durch die letzte Zeile der Matrix für alle Lösungen erfüllt. Diese quadratische Matrix ist invertierbar, denn andernfalls wäre die Dimension des Lösungsraumes des LGS größer als 0: Die

Gerade $\{x + c \cdot y,\, c \in I\!R\}$ wäre ebenfalls im Lösungsraum enthalten, wobei y eine existierende, nicht-triviale Lösung des homogenen LGS wäre. Nun sei der Zustandsraum von vornherein um die Zustände weggekürzt, die fast sicher nicht erreicht werden können, für die also $\sum_n p_{0N}^{(n)} = 0$ gilt. (0 ist ein positiv rekurrenter Zustand. Um dies an einem Beispiel zu erläutern, sei der Ursprungszustandsraum $\{0, 1, ..., 10\}$ und seien die Ursprungszustände 2 und 5 fast sicher nicht zu erreichen, dann kann der um diese Zustände eliminierte Zustandsraum $\{0, 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$ in den Raum $\{0, 1, ..., 8\}$ umdefiniert werden, ohne die Markovsche Bedingung zu verletzen. Der kritische Zustand N ist somit nicht mehr 10, sondern 8.

Außer den Werten x_i wären auch die Wahrscheinlichkeit p_{01} größer als null, da man zum Zustand 1 nur über den Zustand 0 gelangt. Somit wäre außer im trivialen Fall $\delta_{(1,0)_{\mathrm{post}}}$, der nur die Lösung $x = (1, 0) \in I\!R^2$ zuläßt, sowohl x_0 als auch x_1 größer als 0 und somit würden alle x_i in $(0, 1)$ liegen. Daraus folgt, daß die Teilmenge

$$\left\{x + c \cdot y,\, c \in \left[0, \min\left\{\min_{y_i>0}\left\{\frac{1-x_i}{y_i}\right\}, \min_{y_i<0}\left\{\frac{-x_i}{y_i}\right\}\right\}\right]\right\}$$

von stochastischen Lösungen ebenfalls im Lösungsraum des LGS liegt. Hier sei $\min(\emptyset) = \infty$ definiert. Das gesamte Minimum existiert wegen der Existenz eines von 0 verschiedenen y_i. Diese Aussage wäre aber ein Widerspruch zur Eindeutigkeit der stochastischen Lösung.

Aus der Invertierbarkeit der Matrix folgt nun, daß die Lösungselemente stetig in p sind. Mit der Definition

$$(a_{ij}(p)) := \begin{pmatrix} Q^{(i^*,p)_{post}} & - & E_{i^*+1} \\ & & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{ gilt } \pi_{(i^*,p)_{post}} = (a_{ij}(p))^{-1}\, e_{i^*+1} = \frac{(a^*_{ji}(p))}{|(a_{ij})(p)|} e_{i^*+1}.$$

Da auch die Elemente $\left(a^*_{ji}(p)\right)$ Determinanten und damit Polynome in Abhängigkeit von p sind, sind die Wahrscheinlichkeiten $\pi_{(i^*,p)_{post}}(i)$ stetig in p. Analoges gilt außer für die stationären Wahrscheinlichkeiten $(\pi_{(i^*,p)_{post(2)}}(i))_{i\in I}$ auch für die stationären Wahrscheinlichkeiten $\tilde{\pi}_{(i^*,p)_{post}}(i)$, da die $\tilde{q}_{ij}^{(i^*,p)_{post}}$ ebenfalls stetig in p sind, wie die folgende Darstellung zeigt:

$$\tilde{q}_{ij}^{(i^*,p)_{post}} = \left(1_{\{i<i^*\}} + p1_{\{i=i^*\}}\right) p_{ij} + \left((1-p)1_{\{i=i^*\}} + 1_{\{i>i^*\}}\right) p_{0j}.$$

Um die Stetigkeit der Wahrscheinlichkeiten $\tilde{\pi}_{(i^*,p)_{\mathrm{post}(2)}}(i)$ nachzuweisen, muß man etwas anders vorgehen, da der Prozeß (X_n^-) unter der Strategie $(i^*, p)_{\mathrm{post}(2)}$ kein Markov-Prozeß ist, denn es ist

$$P(X_n^- = j | X_{n-1} = i^*,\, X_{n-2} = i^*) \neq P(X_n^- = j | X_{n-1}^- = i^*,\, X_{n-2} < i^*).$$

Dieses Problem umgeht man, indem der Zustand $X_n^- = i^*$ in die Zustände $X_n^- = (i^*, i^*)$, wenn $X_{n-1} = X_n^- = i^*$ gilt und $X_n^- = (i^*, < i^*)$, wenn $X_{n-1} < X_n^- = i^*$ gilt, aufgespalten wird. Dann gelten für $i \in \{0, ..., i^* - 1, i^* + 1, ..., N\}$ die folgenden Identitäten:

$$\tilde{q}_{ij}^{(i^*,p)_{\text{post}(2)}} = p_{ij}1_{\{i<i^*\}} + p_{0j}1_{\{i>i^*\}},$$

$$\tilde{q}_{(i^*,i^*),(i^*,i^*)}^{(i^*,p)_{\text{post}(2)}} = p_{i^*i^*}, \qquad \tilde{q}_{(i^*,<i^*),(i^*,i^*)}^{(i^*,p)_{\text{post}(2)}} = (1-p)p_{i^*i^*},$$

$$\tilde{q}_{(i^*,i^*),(i^*,<i^*)}^{(i^*,p)_{\text{post}(2)}} = 0, \qquad \tilde{q}_{(i^*,<i^*),(i^*,<i^*)}^{(i^*,p)_{\text{post}(2)}} = p \cdot p_{0i^*},$$

$$\tilde{q}_{(i^*,i^*),j}^{(i^*,p)_{\text{post}(2)}} = p_{i^*,j}, \qquad \tilde{q}_{(i^*,<i^*),j}^{(i^*,p)_{\text{post}(2)}} = (1-p)\cdot p_{0j} + pp_{i^*j},$$

$$\tilde{q}_{j,(i^*,i^*)}^{(i^*,p)_{\text{post}(2)}} = 0, \qquad \tilde{q}_{j,(i^*,<i^*)}^{(i^*,p)_{\text{post}(2)}} = p_{ji^*}1_{\{j<i^*\}} + p_{0i^*}1_{\{j>i^*\}}.$$

Der Rest des Nachweises der Stetigkeit folgt auch hier analog, allerdings mit einer um eins höheren Dimension des LGS. ■

Lemma 34 *Es sei* $0 \leq i^* < j^*$ *und* $\phi_{i^*}(c_0) = \phi_{j^*}(c_0)$ *für ein* $c_0 \in I\!R^+$. *Dann gilt für alle* $c \in I\!R^+$*:*

$$\phi_{i^*}(c) \leq \phi_{j^*}(c) \quad \Leftrightarrow \quad c \geq c_0.$$

Beweis:

$$\pi_{i^*}(0)(1-p_{00}) + c_0\tilde{\pi}_{i^*}(N) = \phi_{i^*}(c_0) = \phi_{j^*}(c_0) = \pi_{j^*}(0)(1-p_{00}) + c_0\tilde{\pi}_{j^*}(N).$$

Nach dem letzten Lemma ist $\tilde{\pi}_{j^*}(N) \geq \tilde{\pi}_{i^*}(N)$. Also bewirkt eine Vergrößerung (Verkleinerung) von c_0, daß $\phi_{j^*}(c_0)$ kleinergleich (größergleich) $\phi_{i^*}(c_0)$ wird. Somit ist das Lemma gezeigt.

Lemma 35 *Optimieren bei festem* c_0 *die Kontrollgrenzenstrategien mit Schwellenwerten* i^* *und* $j^*(> i^*)$ *die Durchschnittskosten, dann gilt dies auch für alle Schwellenwerte* i *aus* I *mit* $i^* < i < j^*$.

Beweis: Wie bereits erwähnt, zählt dieses Kostenmodell zu der Klasse von Modellen, die in dieser Arbeit als erste behandelt worden sind. Daher stimmt auch die dort definierte Kostenfunktion ϕ_δ mit der hier aufgestellten Kostenfunktion ϕ_δ für jede Strategie $\delta \in \Pi_3$ überein. Wegen $p_{0N} > 0$ und $p_{iN} \uparrow (i)$ gilt nun $\inf_{i\in\{0,\ldots,N\}}\{p_{iN}\} = p_{0N} > 0$, und somit folgt aus dem Satz 20 mit $\alpha := 1 - p_{0N}$ und der Wertfunktion $\tilde{V}_{\delta,\alpha}$ des Modells mit den dort angegebenen Größen aus $\delta(N) = N$

$$\phi_\delta(i) = (1-\alpha)\left(d(N,N) + \tilde{V}_{\delta,\alpha}(0)\right). \text{ Nun gilt } \phi_{\delta_{i^*}} \leq \phi_\delta \text{ und } \phi_{\delta_{j^*}} \leq \phi_\delta \; \forall \delta \in \Pi_3.$$

Deshalb gilt $\tilde{V}_{\delta_{i^*},\alpha}(0) \leq \tilde{V}_{\delta,\alpha}(0)$ und $\tilde{V}_{\delta_{j^*},\alpha}(0) \leq \tilde{V}_{\delta,\alpha}(0) \forall \delta \in \Pi_3$.

Eine Kontrollgrenzenstrategie mit Schwellenwert i^* optimiert genau dann $\tilde{V}_{\delta,\alpha}(0)$ in δ,

$$\text{wenn gilt: } \left(\left(\alpha\sum_{j=0}^{N} p_{ij}\tilde{V}_\alpha(j) \geq 1 + \alpha\sum_{j=0}^{N} p_{0j}\tilde{V}_\alpha(j) \text{ oder } \sum_{n=0}^{\infty} p_{0i}^{(n)} = 0\right) \; \forall i \geq i^*\right)$$

$$\text{und} \quad \left(\left(\alpha \sum_{j=0}^{N} p_{ij} \tilde{V}_\alpha(j) \leq 1 + \alpha \sum_{j=0}^{N} p_{0j} \tilde{V}_\alpha(j) \text{ oder } \sum_{n=0}^{\infty} p_{0i}^{(n)} = 0 \right) \; \forall i < i^* \right).$$

Denn wenn der Wert i bei Start in 0 fast sicher erreicht werden kann, also die rechte Seite und die Ungleichungen nicht gelten würden, würde die Strategie, die sich in i genau entgegengesetzt verhält, $\tilde{V}_{\delta,\alpha}(0)$ in δ verringern. Kann i bei Start in 0 fast sicher nicht erreicht werden, ist der Wert $\tilde{V}_{\delta,\alpha}(0)$ unabhängig davon, wie sich δ in i verhält. Der Fall $i = N$ ist uninteressant, da ein ausgefallenes System auf jeden Fall ersetzt werden muß. Wenn die Kontrollgrenzenstrategien mit Schwellenwerten i^* und j^* optimal sind, folgt aus der Monotonie von $\sum_{j=0}^{N} p_{ij} \tilde{V}_\alpha(j)$ in i das Folgende:

$$f(i) := \sum_{j=0}^{N} p_{ij} \tilde{V}_\alpha(j) \text{ ist konstant in } \{i^*, ..., j^*\} \setminus \left\{ i \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} p_{0i}^{(n)} = 0 \right\}.$$

Da in der Menge $\left\{ i \in I \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} p_{0i}^{(n)} = 0 \right\}$ jede Aktion optimal ist, optimieren auch alle Kontrollgrenzenstrategien mit Schwellenwerten $\{i^*, ..., j^*\}$ $V_{\delta,\alpha}(0)$ in δ und schließlich auch ϕ_δ in δ. ∎

Satz 46

1. *Es existieren j_0 aus I und positive reelle Größen $c_{j_0} \geq c_{j_0+1} \geq ... \geq c_N$, so daß die Kontrollgrenzenstrategie δ_{i^*} mit folgendem Schwellenwert i^* optimal ist:*
   $i^* = N$ *falls* $0 \leq c < c_N$,
   $i^* = j$ *falls* $c_{j+1} \leq c < c_j$,
   $i^* = j_0$ *falls* $c \geq c_{j_0}$.

2. *Im Fall $p_{0N} < p_{1N}$ kann $j_0 = 1$ gewählt werden.*

Beweis: Zunächst wird der triviale Fall $c = 0$ behandelt: Unter Verwendung der Kontrollgrenzenstrategie mit Schwellenwert i^* haben die Durchschnittskosten lediglich den Wert $\pi_{i^*}(0)(1 - p_{00})$. Dieser sinkt mit zunehmendem i^*, so daß die bang-bang Strategie mit Schwellenwert N hier offensichtlich die optimale Strategie darstellt. Nun gibt es die folgenden zwei Möglichkeiten:
Fall a: Die bang-bang Strategie mit Schwellenwert N, δ_N, ist für alle $c \in I\!R^+$ optimal. In diesem Fall kann $j_0 = N$ und $c_N = 0$ gewählt werden.
Fall b: $\exists (j, d_1) \in \{0, ..., N-1\} \times I\!R^+ : \phi_j(d_1) < \phi_N(d_1)$. Dann sei
$d_0 := \inf\{d_1 \in I\!R^+ | \exists j(d_1) \in \{0, ..., N-1\} : \phi_{j(d_1)}(d_1) < \phi_N(d_2)\}$. Diese Funktion $j : U \to \{0, 1, ..., N\}$, gebe nun den kleinsten Zustand j in x mit $\phi_j(x) < \phi_N(x)$ an. U sei die Teilmenge von $I\!R^+$, auf der solch ein Zustand existiert. Aus der Stetigkeit von $\phi_{j(d_0)} - \phi_N$ und der Ungleichung $\phi_{j(d_0)}(d) \geq \phi_N(d)$ für alle d kleiner als d_0 folgt die Identität $\phi_{j(d_0)}(d_0) = \phi_N(d_0)$. Nun sei $j^* = j(d_0)$, so daß die Definition der Funktion j die Ungleichung $j^* < N$ ergibt. Für alle i mit $j^* < i \leq N$ sei $c_i := d_0$. Es sei erwähnt, daß im speziellen Fall $c = d_0$ jede dieser Kontrollgrenzenstrategien δ_i mit

einem Schwellenwert $i \in \{j^*, ..., N\}$ nach Lemma 35 ebenfalls optimal ist. Für jeden reellen nicht-negativen Wert c, der kleinergleich d_0 ist, wurde die optimale Strategie ermittelt. Um das gleiche auch für Werte größer als d_0 tun zu können, betrachte man die folgende Rekursion:
Zunächst sei $i^* = j^*$.
Fall A: Die bang-bang Strategie mit Schwellenwert i^* ist für alle $c \in [d_0, \infty)$ optimal. In diesem Fall kann $j_0 := i^*$ und $c_{i^*} = d_0$ gewählt werden.
Fall B: $\exists (j, d_1) \in \{0, ..., i^* - 1\} \times (c_{i^*+1}, \infty) : \phi_j(d_1) < \phi_{i^*}(d_1)$. Dann sei $d_0 := \inf\{d_1 > c_{i^*+1} | \exists j(d_1) \in \{0, ..., i^* - 1\} : \phi_{j(d_1)}(d_1) < \phi_{i^*}(d_2)\}$. Unter Verwendung der gleichen Funktion j erhält man annähernd das gleiche Resultat wie oben, mit dem einzigen Unterschied, daß N durch i^* ausgetauscht wird. Für das neue j^* gilt das Folgende: da für alle $c \in [c_{i^*+1}, d_0)$ die Strategie δ_{i^*} optimal ist, und somit außer $\phi_{i^*}(d_0) = \phi_{j^*}(d_0)$ auch $\phi_{i^*}(c) < \phi_{j^*}(c)$ gilt, muß nach Lemma 34 $j^* < i^*$ sein. Nun kann für alle $i : j^* < i < i^*$ $c_i = c_{i^*+1}$ gewählt werden, da bei $c = c_{i^*+1}$ die Kontrollgrenzenstrategien mit den Schwellenwerten i^* und j^* optimal sind: Nach den Lemmatas 34 und 35 können die Kontrollgrenzenstrategien mit diesen Schwellenwerten i nur bei c_{i^*+1} Optimalität liefern. Nun kann mit j^* und $c_{i^*+1} = d_0$ diese Fallunterscheidung erneut durchgeführt werden.
Rekursiv wird so die Folge $(c_i)_{i=j_0}^N$ ermittelt, wobei das j_0 der Wert i^* ist, bei dem der Fall a eintritt. Dieses ist spätestens bei $j_0 = 1$ der Fall.
Der zweite Teil des Satzes wird indirekt gezeigt: Die minimal mögliche Wahl des j_0 sei größer als eins. ϕ_{i^*} erfüllt die folgende Identität:

$$\phi_{i^*}(c) = \pi_{i^*}(0)(1 - p_{00}) + \tilde{\pi}_{i^*}(N) \cdot c.$$

Fall I : $\tilde{\pi}_{\delta_1}(N) < \tilde{\pi}_{\delta_{j_0}}(N) \Rightarrow \phi_{j_0}(c) - \phi_1(c) = (1-p_{00})(\pi_{\delta_{j_0}}(0) - \pi_{\delta_1}(0)) + c(\tilde{\pi}_{\delta_{j_0}}(N) - \tilde{\pi}_{\delta_1}(N))$.

Der erste Summand ist zwar kleinergleich null, aber da der Faktor von c positiv ist, gibt es ein $c_0 \in I\!R$, so daß der obige Ausdruck positiv ist für alle $c > c_0$. Dies hat zur Folge, daß für ein genügend großes c die Kontrollgrenzen-Strategie mit Schwellenwert 1 günstiger ist als die Kontrollgrenzen-Strategie mit Schwellenwert j_0. In diesem Fall muß also $j_0 = 1$ sein.

Fall II: $\tilde{\pi}_{\delta_1}(N) = \tilde{\pi}_{\delta_{j_0}}(N) \overset{\text{Lemma 33(3)}}{\Rightarrow} \tilde{\pi}_{\delta_1}(N) = ... = \tilde{\pi}_{\delta_{j_0}}(N) \overset{\text{Lemma 33}}{\Rightarrow} \pi_{\delta_1}(0) = ... = \pi_{\delta_{j_0}}(0)$.

Daraus ergibt sich $\phi_{j_0}(c) = \phi_1(c)$ für alle $c \in I\!R^+$. Somit ist statt der bang-bang Strategie mit Schwellenwert j_0 auch die bang-bang Strategie mit Schwellenwert 1 wählbar, um Optimalität zu erreichen. Der Widerspruch ist auch hier erreicht. ■

Um die Wichtigkeit der Voraussetzung des zweiten Teils des letzten Satzes plausibel zu machen, wird im folgenden kurz nachgerechnet, daß unter den Bedingungen $p_{0N} = p_{1N}$

und $p_{01} > 0$ die Strategie δ_2 für alle Strafkosten $c \in I\!R^+$ günstiger ist als die Strategie δ_1:

$$\begin{aligned}
\pi_{\delta_2}(0) &= 1 - \pi_{\delta_2}(1) \leq 1 - \pi_{\delta_2}(0)p_{01} \;\Rightarrow\; \pi_{\delta_2}(0) \leq \frac{1}{1+p_{01}} < 1 = \pi_{\delta_1}(0) \\
\tilde{\pi}_{\delta_2}(N) &= \pi_{\delta_2}(0)p_{0N} + \pi_{\delta_2}(1)p_{1N} = p_{0N}\left(\pi_{\delta_2}(0) + \pi_{\delta_2}(1)\right) \text{ wegen } p_{0N} = p_{1N} \\
&= p_{0N} = \pi_{\delta_1}(0)p_{0N} = \tilde{\pi}_{\delta_1}(N). \\
\text{Somit ist } \phi_{\delta_2}(c) &= \pi_{\delta_2}(0) + c\tilde{\pi}_{\delta_2}(N) < \pi_{\delta_1}(0) + c\tilde{\pi}_{\delta_2}(N) = \phi_{\delta_1}(c).
\end{aligned}$$

Den Zustand N erreicht man unter diesen Bedingungen vom Zustand 0 aus genauso wahrscheinlich wie vom Zustand 1 aus, so daß die Häufigkeit des Erreichens des *kritischen* Zustandes unter beiden Strategien gleich ist. Allerdings finden Neuersetzungen unter δ_2 nicht ganz so oft statt wie unter δ_1, so daß δ_2 besser als δ_1 ist. Da für die folgende Theorie auch der zweite Teil des letzten Satzes benötigt wird, gilt ab jetzt die folgende

Voraussetzung: Es gelte $p_{0N} \neq p_{1,N}$.

Satz 47 *Für alle Strategien δ, die die Ungleichung $\frac{\tilde{\pi}_\delta(N)}{\pi_\delta(0)} \leq \epsilon_1$ erfüllen, existieren $j \in I$ und $\lambda \in [0,1]$ so daß die folgende Ungleichung erfüllt ist:*

$$\frac{\tilde{\pi}_{(j,\lambda)_{pre}}(N)}{\pi_{(j,\lambda)_{pre}}(0)} = \frac{\lambda\tilde{\pi}_{\delta_j}(N) + (1-\lambda)\tilde{\pi}_{\delta_{j+1}}(N)}{\lambda\pi_{\delta_j}(0) + (1-\lambda)\pi_{\delta_{j+1}}(0)} \leq \epsilon_1$$

und auch die Identität $\pi_{(j,\lambda)_{pre}}(0) = \lambda\pi_{\delta_j}(0) + (1-\lambda)\pi_{\delta_{j+1}}(0) = \pi_\delta(0)$ gilt.

Beweis: Zunächst folgt aus Lemma 33 die folgende Ungleichungskette $(*)$:

$$\min_{\{\delta\in\Pi_3\}} \pi_\delta(0) = \pi_{\delta_N}(0) \leq \ldots \leq \pi_{\delta_1}(0) = 1.$$

Die erste Identität wird näher erklärt: Ein ausgefallenes System muß auf jeden Fall ersetzt werden. Deswegen ist δ_N die Strategie, die am seltensten ersetzt, unter der der Prozeß $(X_n)_{n\in N}$ also am seltensten in den Zustand 0 gelangt und die somit den Ausdruck $\pi_\delta(0)$ in δ minimiert. Eingeschränkt auf die bang-bang Strategien folgt diese Aussage auch aus Lemma 33.

Es ergibt sich für alle Strategien δ :	$1 = \pi_{\delta_1}(0) \geq \pi_\delta(0) \geq \pi_{\delta_N}(0)$.
$\overset{(*)}{\Rightarrow}$ Für gegebenes δ existiert ein $j \in I$:	$\pi_{\delta_{j+1}}(0) \leq \pi_\delta(0) \leq \pi_{\delta_j}(0)$.
Nun sei $\lambda \in [0,1)$ so daß gilt:	$\pi_\delta(0) = \lambda\pi_{\delta_j}(0) + (1-\lambda)\pi_{\delta_{j+1}}(0)$.

Bei dem Hilfsproblem sind für $c := c_{j+1}$ die Strategien δ_j und δ_{j+1} beide gleich optimal. Darum gilt für alle Strategien $\delta \in \Pi_3$: $\phi_j(c) = \phi_{j+1}(c) \leq \phi_\delta(c)$. Somit ergibt sich:

$$\pi_j(0)(1-p_{00}) + c\tilde{\pi}_j(N) = \pi_{j+1}(0)(1-p_{00}) + c\tilde{\pi}_{j+1}(N) \leq \pi_\delta(0)(1-p_{00}) + c\tilde{\pi}_\delta(N).$$

Nun folgt aus der Definition der pre-randomisierten bang-bang Strategie:

$$\begin{aligned} \pi_{(j,\lambda)_{pre}}(i) &= \lambda\pi_j(i) + (1-\lambda)\pi_{j+1}(i)\ \forall i \in I \\ \text{und } \tilde{\pi}_{(j,\lambda)_{pre}}(i) &= \lambda\tilde{\pi}_j(i) + (1-\lambda)\tilde{\pi}_{j+1}(i)\ \forall i \in I. \end{aligned}$$

Diese Identitäten führen zu der folgenden Ungleichung:

$$\begin{aligned} & \pi_{(j,\lambda)_{pre}}(0)(1-p_{00}) + c\tilde{\pi}_{(j,\lambda)_{pre}}(N) \\ = \; & \left(\lambda\pi_{\delta_j}(0) + (1-\lambda)\pi_{\delta_{j+1}}(0)\right)(1-p_{00}) + c\left(\lambda\tilde{\pi}_{\delta_j}(N) + (1-\lambda)\tilde{\pi}_{\delta_{j+1}}(N)\right) \\ = \; & \lambda\left(\pi_{\delta_j}(0)(1-p_{00}) + c\tilde{\pi}_{\delta_j}(N)\right) + (1-\lambda)\left(\pi_{\delta_{j+1}}(0)(1-p_{00}) + c\tilde{\pi}_{\delta_{j+1}}(N)\right) \\ \leq \; & \lambda\left(\pi_\delta(0)(1-p_{00}) + c\tilde{\pi}_\delta(N)\right) + (1-\lambda)\left(\pi_\delta(0)(1-p_{00}) + c\tilde{\pi}_\delta(N)\right) \\ = \; & \pi_\delta(0)(1-p_{00}) + c\tilde{\pi}_\delta(N). \end{aligned}$$

Aus $\pi_{(j,\lambda)_{pre}}(0) = \lambda\pi_{\delta_j}(0)+(1-\lambda)\pi_{\delta_{j+1}}(0) = \pi_\delta(0)$ folgt $\tilde{\pi}_{(j,\lambda)_{pre}}(N) \leq \tilde{\pi}_\delta(N)$.

Schließlich folgt aus $\pi_{(j,\lambda)_{pre}}(0) = \pi_\delta(0)$ die Ungleichung:

$$\frac{\tilde{\pi}_{(j,\lambda)_{pre}}(N)}{\pi_{(j,\lambda)_{pre}}(0)} \leq \frac{\tilde{\pi}_\delta(N)}{\pi_\delta(0)} \leq \epsilon_1. \quad \blacksquare$$

Mit diesem Satz ist gezeigt, daß es zu jeder Strategie $\delta \in \tilde{\Pi}_3 := \left\{\delta \in \Pi_3 \,\middle|\, \frac{\tilde{\pi}_\delta(N)}{\pi_\delta(0)} \leq \epsilon_1\right\}$ eine pre-randomisierte Strategie aus $\tilde{\Pi}_3$ gibt, die genauso selten ersetzt, also genauso gut ist. Somit ist eine pre-randomisierte Strategie optimal. Um die analoge Aussage auch für eine post-randomisierte Strategie treffen zu können, wird zunächst unter Verwendung des vorgestellten Kostenmodells das folgende Lemma bewiesen:

Lemma 36 *1. Für alle Strategien $(i,p)_{pre}$, $i \in I$, $p \in [0,1]$ existieren q, $q_2 \in [0,1]$, so daß für das Ersetzungs-Modell gilt:*

$$\phi_{(i,p)_{pre}}(c) = \phi_{(i,q)_{post}}(c), \qquad \phi_{(i,p)_{pre}}(c) = \phi_{(i,q_2)_{post(2)}}(c) \quad \forall c \in I\!R^+.$$

2. Für alle Strategien $(i,q)_{post(2)}$, $i \in I$, $q \in [0,1]$ existiert ein $p \in [0,1]$, so daß für das Ersetzungs-Modell gilt:

$$\phi_{(i,q)_{post(2)}}(c) = \phi_{(i,p)_{pre}}(c)\ \forall c \in I\!R^+ mit \quad p := \frac{\frac{q}{\pi_{\delta_{i*}}(0)}}{\frac{q}{\pi_{\delta_{i*}}(0)} + \frac{1-q}{\pi_{\delta_{i*+1}}(0)}}.$$

3. Für alle Strategien $(i,q)_{post}$, $i \in I$, $q \in [0,1]$ existiert ein $p \in [0,1]$, so daß für das Ersetzungs-Modell gilt:

$$\phi_{(i,q)_{post}}(c) \leq \phi_{(i,p)_{pre}}(c) \quad \forall c \in [0,1].$$

Beweis:

$$\left.\begin{array}{ll} p=0: & \phi_{(i,0)_{pre}}(c)=\phi_{\delta_i}(c)=\phi_{(i,0)_{post}}(c)=\phi_{(i,0)_{post(2)}}(c) \\ p=1: & \phi_{(i,1)_{pre}}(c)=\phi_{(i+1,0)_{pre}}(c)=\phi_{(i+1,0)_{post}}(c)=\phi_{(i,1)_{post}}(c)=\phi_{(i,1)_{post(2)}} \end{array}\right\} q=p.$$

Für $p\in(0,1)$ werden die drei Fälle getrennt gezeigt:

1. $\phi_{(i,p)_{pre}}(c) \quad = \quad p\phi_{i+1}(c)+(1-p)\phi_i(c).$

Somit ist für festes i_0 und c die Funktion $g^c_{i_0}\,:\,p\to\phi_{(i_0,p)_{pre}}(c)$ auf dem Einheitsintervall eine Gerade durch die Punkte $(0,\phi_{i^*}(c))$ und $(1,\phi_{i^*+1}(c))$.
Nach Lemma 33 sind $\phi_{(i_0,p)_{post}}=\pi_{(i_0,p)_{post}}(0)(1-p_{00})+c\cdot\tilde{\pi}_{(i_0,p)_{post}}(N)$ und genauso $\phi_{(i_0,p)_{post(2)}}$ stetig in p für alle Zustände i aus I. Wegen $\phi_{(i,0)_{pre}}(c)=\phi_{(i,0)_{post}}(c)=\phi_{(i,0)_{post(2)}}$, $\phi_{(i,1)_{pre}}(c)=\phi_{(i,1)_{post}}(c)=\phi_{(i,1)_{post(2)}}$ und der Linearität von $\phi_{(i,p)_{pre}}(c)$ in p muß es auf Grund des Zwischenwertsatzes der Analysis ein q und ein q_2 aus dem Einheitsintervall geben mit $\phi_{(i_0,p)_{pre}}(c)=\phi_{(i_0,q)_{post}}(c)=\phi_{(i_0,q_2)_{post(2)}}(c)$.
2. Die Zufallsvariable τ_n gebe den Zeitpunkt des $n-$ten Besuches im Zustand 0 an. Dabei werden erneut Besuche vom Zustand 0 kommend nicht mitgerechnet. $\tilde{C}^c_\delta(I)$ seien die Kosten im Zeitintervall $I\subset\mathbb{Z}^+$ unter Verwendung der Strategie δ und Strafkosten $d(N,N)=c$. Da der Zustand 0 positiv rekurrent ist, und I unter δ bzgl. der Prozesse $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ und $(X^-_n)_{n\in N}$ irreduzibel ist, gilt

$$\phi_\delta=\frac{E\left(\tilde{C}^c_\delta([\tau_1,\,\tau_2])\right)}{E_\delta(\tau_2-\tau_1)}.$$

Nun entspricht die Strategie $(i^*,q)_{\mathrm{post(2)}}$ in jedem Zyklus entweder der Strategie δ_{i^*} oder der Strategie δ_{i^*+1}, so daß die folgende Identität gilt:

$$\phi_{(i^*,q)_{\mathrm{post(2)}}}=\frac{E(\tilde{C}^c_\delta([\tau_1,\tau_2])|\delta=\delta_{i^*})\cdot P(\delta=\delta_{i^*})+E(\tilde{C}^c_\delta([\tau_1,\tau_2])|\delta=\delta_{i^*+1}))\cdot P(\delta=\delta_{i^*+1})}{P(\delta=\delta_{i^*})\cdot E(\tau_2-\tau_1|\delta=\delta_{i^*})+P(\delta=\delta_{i^*+1})\cdot E(\tau_2-\tau_1|\delta=\delta_{i^*+1})}$$

$$=\frac{E(\tilde{C}^c_{\delta_{i^*}}([\tau_1,\tau_2]))\cdot(1-q)+E(\tilde{C}^c_{\delta_{i^*+1}}([\tau_1,\tau_2]))\cdot q}{\frac{1-q}{\pi_{\delta_{i^*}}(0)}+\frac{q}{\pi_{\delta_{i^*+1}}(0)}}$$

$$=E\left(\tilde{C}^c_{\delta_{i^*}}([\tau_1,\,\tau_2])\right)\cdot\pi_{\delta_{i^*}}(0)\cdot\frac{\frac{1-q}{\pi_{\delta_{i^*}}(0)}}{\frac{1-q}{\pi_{\delta_{i^*}}(0)}+\frac{q}{\pi_{\delta_{i^*+1}}(0)}}+E\left(\tilde{C}^c_{\delta_{i^*+1}}([\tau_1,\,\tau_2])\right)\cdot\pi_{\delta_{i^*+1}}(0)\cdot\frac{\frac{q}{\pi_{\delta_{i^*+1}}(0)}}{\frac{1-q}{\pi_{\delta_{i^*}}(0)}+\frac{q}{\pi_{\delta_{i^*+1}}(0)}}$$

$$=\phi_{i^*}\cdot(1-p)+\phi_{i^*+1}\cdot p=\phi_{(i^*,p)_{\mathrm{pre}}}\quad\mathrm{mit}\quad p:=\frac{\frac{q}{\pi_{\delta_{i^*+1}}(0)}}{\frac{1-q}{\pi_{\delta_{i^*}}(0)}+\frac{q}{\pi_{\delta_{i^*+1}}(0)}}.$$

3. Es wird gezeigt, daß für alle Strategien $(i^*,q)_{post}$, $i^*\in I$, $q\in[0,1]$ und für alle $c\in\mathbb{R}^+$ ein $p\in[0,1]$ existiert, so daß die folgende Ungleichung gilt:

$$\phi_{(i^*,q)_{post}}(c)\quad\le\quad\phi_{(i^*,p)_{post(2)}}(c).$$

Aus dem zweiten Teil dieses Lemmas folgt dann die gewünschte Aussage.
Die Stategie $\delta_{(i^*,p)_{\mathrm{post}}}$ unterscheidet sich dann, und nur dann von der Strategie δ_{i^*}, wenn

der Prozeß $(X_n^-)_{n\in N}$ den Zustand i^* erlangt. Es seien die folgenden Erwartungswerte definiert:

$$\begin{aligned}\tilde{C}_\delta^{c,j} &:= E\left[\tilde{C}_\delta^c\left([\tau_1,\tau_2]\,\middle|\exists n_0\in(\tau_1,\tau_2]:X_{n_0}^-=j\right)\right],\\ \tilde{C}_\delta^{c,\neq j} &:= E\left[\tilde{C}_\delta^c\left([\tau_1,\tau_2]\,\middle|\forall n_0\in(\tau_1,\tau_2]:X_{n_0}^-\neq j\right)\right].\end{aligned}$$

Auch hier kann die Strategie δ nur durch ihre Parameter angegeben werden. Außerdem sei $p_{0i^*}^{(m)}$ die Wahrscheinlichkeit, daß der Prozeß $(X_n)_{n\in N}$ bei Start in 0 den Wert i^* unter der Strategie δ_∞, die mit Wahrscheinlichkeit 1 nie ersetzt, erstmals nach genau m Schritten erreicht:

$$p_{0i^*}^{(m)} := P_{\delta_\infty}\left(X_1<i^*,...,X_{m-1}<i^*,\,X_m=i^*\right|X_0=0).$$

Im folgenden sind lange Brüche in mehrere Zeilen aufgeteilt und werden jeweils mit $\frac{+\ldots}{+\ldots}$ fortgesetzt. Zunächst einmal ist

$$\phi_{(i^*,p)_{\text{post}(2)}}(c)=\frac{E\left[\tilde{C}^c_{(i^*,p)_{\text{post}(2)}}([\tau_1,\tau_2])\right]}{E_{(i^*,p)_{\text{post}(2)}}(\tau_2-\tau_1)}$$

$$=\frac{E\left[\tilde{C}^c_{(i^*,p)_{\text{post}(2)}}([\tau_1,\tau_2]|\exists m\in(\tau_1,\tau_2]:X_m^-=i^*,\,X_m=0)\right]P\left(\exists m\in(\tau_1,\tau_2]:X_m^-=i^*,\,X_m=0\right)}{E_{(i^*,p)_{\text{post}(2)}}\left(\tau_2-\tau_1|\exists m\in(\tau_1,\tau_2]:X_m^-=i^*,\,X_m=0\right)P\left(\exists m\in(\tau_1,\tau_2]:X_m^-=i^*,\,X_m=0\right)}$$

$$\frac{+E\left[\tilde{C}^c_{(i^*,p)_{\text{post}(2)}}([\tau_1,\tau_2]|\exists m\in(\tau_1,\tau_2]:X_m^-=i^*,\,X_m=i^*)\right]P\left(\exists m\in(\tau_1,\tau_2]:X_m^-=i^*,\,X_m=i^*\right)}{+E_{(i^*,p)_{\text{post}(2)}}\left(\tau_2-\tau_1|\exists m\in(\tau_1,\tau_2]:X_m^-=i^*,\,X_m=i^*\right)P\left(\exists m\in(\tau_1,\ \tau_2]:X_m^-=i^*,\,X_m=i^*\right)}$$

$$\frac{+E\left[\tilde{C}^c_{(i^*,p)_{\text{post}(2)}}([\tau_1,\tau_2]|\forall m\in(\tau_1,\tau_2]:X_m^-\neq i^*)\right]P\left(\forall m\in(\tau_1,\tau_2]:X_m^-\neq i^*\right)}{+E_{(i^*,p)_{\text{post}(2)}}\left(\tau_2-\tau_1|\forall m\in(\tau_1,\tau_2]:X_m^-\neq i^*\right)P\left(\forall m\in(\tau_1,\tau_2]:X_m^-\neq i^*\right)}$$

$$=\frac{\tilde{C}_{i^*}^{c,i^*}\sum_{m=1}^\infty p_{0i^*}^{(m)}(1-p)+\tilde{C}_{i^*+1}^{c,i^*}\sum_{m=1}^\infty p_{0i^*}^{(m)}p+\tilde{C}_{i^*}^{c,\neq i^*}\left(1-\sum_{m=1}^\infty p_{0i^*}^{(m)}\right)}{\sum_{m=1}^\infty p_{0i^*}^{(m)}(1-p)\,E_{i^*}(\tau_2-\tau_1|X_{\tau_2^-}=i^*)+\sum_{m=1}^\infty p_{0i^*}^{(m)}pE_{i^*+1}(\tau_2-\tau_1|X^-_{\tau_2-1}=i^*)+(*)}.$$

Außerdem gilt $\quad \phi_{(i^*,p)_{\text{post}}}(c)=\dfrac{E\left[\tilde{C}^c_{(i^*,p)_{\text{post}}}([\tau_1,\tau_2])\right]}{E_{(i^*,p)_{\text{post}}}(\tau_2-\tau_1)}$

$$=\frac{E\left[\tilde{C}^c_{(i^*,p)_{\text{post}}}\left([\tau_1,\tau_2]|X_{\tau_2-1}<X_{\tau_2}^-=i^*\right)\right]P\left(X_{\tau_2-1}<X_{\tau_2}^-=i^*\right)}{E_{(i^*,p)_{\text{post}}}\left(\tau_2-\tau_1|X_{\tau_2-1}<X_{\tau_2}^-=i^*\right)P\left(X_{\tau_2-1}<X_{\tau_2}^-=i^*\right)}$$

$$\frac{+E\left[\tilde{C}^c_{(i^*,p)_{\text{post}}}([\tau_1,\tau_2]|\exists m\in(\tau_1,\tau_2]:X_m^-=i^*,\,X_m=i^*)\right]P\left(\exists m\in(\tau_1,\tau_2]:X_m^-=i^*,\,X_m=i^*\right)}{+E_{(i^*,p)_{\text{post}}}\left(\tau_2-\tau_1|\exists m\in(\tau_1,\tau_2]:X_m^-=i^*,\,X_m=i^*\right)P\left(\exists m\in(\tau_1,\ \tau_2]:X_m^-=i^*,\,X_m=i^*\right)}$$

$$\frac{+E\left[\tilde{C}^c_{(i^*,p)_{\text{post}}}([\tau_1,\tau_2]|\exists m\in(\tau_1,\tau_2]:X_m^-\neq i^*)\right]P\left(\forall m\in(\tau_1,\tau_2]:X_m^-\neq i^*\right)}{+E_{(i^*,p)_{\text{post}}}\left(\tau_2-\tau_1|\forall m\in(\tau_1,\tau_2]:X_m^-\neq i^*\right)P\left(\forall m\in(\tau_1,\tau_2]:X_m^-\neq i^*\right)}$$

$$=\frac{\tilde{C}_{i^*}^{c,i^*}\sum_{m=1}^\infty p_{0i^*}^{(m)}(1-p)+\tilde{C}_{(i^*,p)_{\text{post}(3)}}^{c,i^*}\sum_{m=1}^\infty p_{0i^*}^{(m)}p+\tilde{C}_{i^*}^{c,\neq i^*}\left(1-\sum_{m=1}^\infty p_{0i^*}^{(m)}\right)}{\sum_{m=1}^\infty p_{0i^*}^{(m)}(1-p)E_{i^*}(\tau_2-\tau_1|X_{\tau_2}^-=i^*)+\sum_{m=1}^\infty p_{0i^*}^{(m)}pE_{(i^*,p)_{\text{post}(3)}}(\tau_2-\tau_1|X_{\tau_2}^-=i^*)+(*)}$$

mit $(*) := \left(1 - \sum_{m=1}^{\infty} p_{0i^*}^{(m)}\right) E_{i^*}(\tau_2 - \tau_1 | X_n^- \neq i^* \forall n \in (\tau_1, \tau_2])$.
Die Funktion f bilde unter der Strategie $\delta_{(i^*,q)_{\mathrm{post}}}$ einen Pfad $(X_n^-, X_n)_{n\in N}$ folgendermaßen auf den Bildpfad $(X^{f,-}, X^f) = \lim_{i\to\infty}(X_n^{i,-}, X_n^i)_{n\in N}$ ab, mit der folgenden rekursiven Definition:

$(X_n^0)_{n\in\mathbb{Z}^+} := (X_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$, $(X_n^{0,-})_{n\in\mathbb{Z}^+} := (X_n^-)_{n\in\mathbb{Z}^+}$. Sind die Folgen $(X_n^i)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ und $(X_n^{i,-})_{n\in\mathbb{Z}^+}$ gegeben, dann sei m die kleinste natürliche Zahl, für die gilt:
$X_m^i < X_{m+1}^{i,-} = X_{m+1}^i = ... = X_{m+n-1}^{i,-} = X_{m+n-1}^i = X_{m+n}^{i,-} = i^*$, $X_{m+n}^i = 0$ für ein $n \in I\!N$. Nun werden $(X_n^{i+1})_{n\in\mathbb{Z}^+}$ und $(X_n^{i+1,-})_{n\in\mathbb{Z}^+}$ folgendermaßen definiert:
$X_0^{i+1} := X_0^i$, $X_1^{i+1,-} := X_1^{i,-}$, $X_1^{i+1} := X_1^i, ... X_{m+1}^{i+1,-} := X_{m+1}^{i,-}$, $X_{m+1}^{i+1} := 0$,
$X_{m+2,-}^{i+1,-} := X_{m+n+1}^{i,-}$, $X_{m+2}^{i+1} := X_{m+n+1}^i$, $X_{m+3}^{i+2,-} := X_{m+n+2}^{i,-}, ...$
Wählt der dem Pfad zugehörige Prozeß in einem Erneuerungsintervall beim ersten Besuch von X^- in i^* den Schwellenwert i^*+1 und bei einem existierenden weiteren Besuch den Schwellenwert i^*, dann wählt der dem Bildpfad zugehörige Prozeß gleich beim ersten Besuch den Schwellenwert i^*. In den anderen Erneuerungsintervallen ist der Bildpfad mit dem Ursprungspfad identisch. Nun wird gezeigt, daß das den Bildpfäden zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß dasjenige ist, das von der Strategie $\delta_{(i^*,p)_{\mathrm{post}(2)}}$ mit einem noch zu bestimmenden Parameter p erzeugt wird. Um diese Vorgehensweise besser zu verstehen, betrachte man das Münzproblem: Eine faire Münze (Erfolgswahrscheinlichkeit für Zahlwurf ist 0.5) werde immer wieder geworfen. Der Pfad wird anschließend auf den Pfad abgebildet, bei dem jeder zweite Kopfwurf in einen Zahlwurf umgewandelt wird. Das Bild-Wahrscheinlichkeitsmaß für jeden Kopfwurf ist die Bernoulli-Verteilung mit der Erfolgswahrscheinlichkeit 0.75. Um ein Problem zu betrachten, daß der hier vorgestellten Methode etwas näher kommt, könnte man auch den Pfad auf einen Pfad abbilden, bei dem Erfolgs-*runs* der Länge $n > 2$ auf einen Erfolgs-*run* der Länge 2 verkürzt werden. Hier kann das Wahrscheinlichkeitsmaß μ des Bildpfades nicht so einfach als Bernoulli-Verteilung angegeben werden, sondern nur in der folgenden Form:
$W_n \in \{K, Z\}$ sei das Ergebnis des $n-$ten Wurfs. Dann gilt für μ:

$$\begin{aligned} P_\mu(W_n = K | W_{n-1} = Z,\ X_{n-2} = Z) &= 1, \\ P_\mu(W_n = K | W_{n-1} = K \text{ oder } W_{n-2} = K) &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Um wieder auf das ursprüngliche Problem zurückzukommen, seien τ_i^f die entsprechenden Zufallsvariablen und $\tilde{C}_{i^*}^c(f)$ die entsprechenden Kosten des Prozesses $(X^{f,-}, X^f)$ und

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{(i^*,p)_{\mathrm{p}\dots}}^{c,j}(f) &:= E\left[\tilde{C}_{(i^*,p)_{\mathrm{p}\dots}}^c \left([\tau_1^f, \tau_2^f] \middle| \exists n_0 \in (\tau_1^f, \tau_2^f] : X_{n_0}^{f,-} = j\right)\right] \\ \tilde{C}_{(i^*,p)_{\mathrm{p}\dots}}^{c,\neq j}(f) &:= E\left[\tilde{C}_{(i^*,p)_{\mathrm{p}\dots}}^c \left([\tau_1^f, \tau_2^f] \middle| \forall n_0 \in (\tau_1^f, \tau_2^f] : X_{n_0}^{f,-} \neq j\right)\right]. \end{aligned}$$

Bei dem Bildpfad wurden von dem Ursprungspfad nur Aufenthalte von X und X^- in i^* eliminiert, so daß $\pi_\delta(0)$ und $\tilde{\pi}_\delta(N)$ und somit $\phi_\delta(c)$ steigen. Somit gilt $\phi_{(i^*,q)_{\text{post}}}(c) \leq \phi^f_{(i^*,q)_{\text{post}}}(c)$. Der letzte Ausdruck stellt die erwarteten Durchschnittskosten der abgebildeten Pfade dar. Diese Ungleichung wird auch durch die folgende Überlegung verdeutlicht:

$$\tilde{C}_{(i^*,p)_{\text{post}}} = 1 + c \cdot P(\tau_2^- = N) = 1 + c \cdot P(\tau_2^{f,-} = N) = \tilde{C}^c_{(i^*,p)_{\text{post}}}(f)\left(\left[\tau_1^f, \tau_2^f\right]\right)$$

$$\tau_2^f - \tau_1^f \leq \tau_2 - \tau_1 \Rightarrow E(\tau_2 - \tau_1) \geq E(\tau_2^f - \tau_1^f)$$

$$\Rightarrow \phi_{(i^*,q)_{\text{post}}}(c) = \frac{\tilde{C}^c_{(i^*,p)_{\text{post}}}([\tau_1, \tau_2])}{E_{(i^*,p)_{\text{post}}}(\tau_2 - \tau_1)} \leq \frac{\tilde{C}^c_{(i^*,p)_{\text{post}}}(f)([\tau_1^f, \tau_2^f])}{E_{(i^*,p)_{\text{post}}}(\tau_2^f - \tau_1^f)} = \phi^f_{(i^*,p)_{\text{post}}}(c).$$

Wenn der Prozeß $(X_n)_{n\in N}$ den Zustand i^* besucht, dann findet eine Umwandlung des Teilpfades durch die Abbildung mit Wahrscheinlichkeit

$$p_{i^*i^*}((1-q) + q)p_{i^*i^*}((1-q) + qp_{i^*i^*}\ldots = p_{i^*i^*}(1-q)\sum_{n=0}^{\infty}[qp_{i^*i^*}]^n = \frac{p_{i^*i^*}(1-q)}{1-qp_{i^*i^*}} =: r$$

statt, und es gilt mit $p := q(1-r)$ (o. steht für 'oder'):

$$\phi_{(i^*,q)_{\text{post}}}(c) \leq \phi^f_{(i^*,q)_{\text{post}}}(c) = \frac{E\left[\tilde{C}^c_{(i^*,q)_{\text{post}}}(f)\left([\tau_1, \tau_2]\right)\right]}{E_{(i^*,q)_{\text{post}}}(\tau_2^f - \tau_1^f)}$$

$$= \frac{\tilde{C}^{c,i^*}_{i^*}(f)\sum_{m=1}^{\infty} p^{(m)}_{0i^*}(1-q) + \tilde{C}^{c,i^*}_{(i^*,p)_{\text{post}(3)}}(f)\sum_{m=1}^{\infty} p^{(m)}_{0i^*} q + \tilde{C}^{c,\neq i^*}_{i^*}(f)\left(1 - \sum_{m=1}^{\infty} p^{(m)}_{0i^*}\right)}{\sum_{m=1}^{\infty} p^{(m)}_{0i^*}\left((1-q)E_{i^*}(\tau_2^f - \tau_1^f | X^{f,-}_{\tau_2^f} = i^*) + qE_{(i^*,p)_{\text{post}(3)}}(\tau_2^f - \tau_1^f | X^f_{\tau_2^f} = i^* \text{ o. } X^f_{\tau_2^f-1} = i^*)\right) + (*)^f}$$

$$= \frac{\tilde{C}^{c,i^*}_{i^*}\sum_{m=1}^{\infty} p^{(m)}_{0i^*}(1-q) + r\tilde{C}^{c,i^*}_{i^*}\sum_{m=1}^{\infty} p^{(m)}_{0i^*} q}{\sum_{m=1}^{\infty} p^{(m)}_{0i^*}(1-q)\, E_{i^*}(\tau_2 - \tau_1 | X^-_{\tau_2} = i^*) + r\sum_{m=1}^{\infty} p^{(m)}_{0i^*} q E_{i^*}(\tau_2 - \tau_1 | X^-_{\tau_2} = i^*)}$$

$$\frac{+(1-r)\tilde{C}^{c,i^*}_{i^*+1}\sum_{m=1}^{\infty} p^{(m)}_{0i^*} q + \tilde{C}^{c,\neq i^*}_{i^*}\left(1 - \sum_{m=1}^{\infty} p^{(m)}_{0i^*}\right)}{+(1-r)\sum_{m=1}^{\infty} p^{(m)}_{0i^*} q E_{i^*+1}(\tau_2 - \tau_1 | X^-_{\tau_2-1} = i^*) + \left(1 - \sum_{m=1}^{\infty} p^{(m)}_{0i^*}\right) E_{i^*}(\tau_2 - \tau_1 | X^-_2 \neq i^*)}$$

$$= \frac{\tilde{C}^{c,i^*}_{i^*}\sum_{m=1}^{\infty} p^{(m)}_{0i^*}(1-p) + \tilde{C}^{c,i^*}_{i^*+1}\sum_{m=1}^{\infty} p^{(m)}_{0i^*} p + \tilde{C}^{c,\neq i^*}_{i^*}\left(1 - \sum_{m=1}^{\infty} p^{(m)}_{0i^*}\right)}{\sum_{m=1}^{\infty} p^{(m)}_{0i^*}(1-p)E_{i^*}(\tau_2 - \tau_1 | X^-_{\tau_2} = i^*) + \sum_{m=1}^{\infty} p^{(m)}_{0i^*} p E_{i^*+1}(\tau_2 - \tau_1 | X^-_{\tau_2-1} = i^*) + (*)}$$

$$= \phi_{(i^*,p)_{\text{post}(2)}}$$

mit $(*)^f := \left(1 - \sum_{m=1}^{\infty} p^{(m)}_{0i^*}\right) E_{i^*}(\tau_2^f - \tau_1^f | X^{f,-}_n \neq i^* \forall n \in (\tau_1^f, \tau_2^f])$.

Die dritte Zeile gilt, da unter Verwendung der bang-bang Strategien mit Schwellenwert i^* die Erwartungswerte durch Anwendung von f nicht geändert werden, mit Ausnahme von:

$$\begin{aligned} & E_{(i^*,p)_{\text{post}(3)}}\left(\tau_2^f - \tau_1^f | X^f_{\tau_2^f-1} = i^* \text{ oder } X^{f,-}_{\tau_2^f} = i^*\right) \\ = \; & E_{(i^*,p)_{\text{post}(3)}}\left(\tau_2^f - \tau_1^f | X^f_{\tau_2^f-1} = i^*\right) P\left(X^f_{\tau_2^f-1} = i^* | X^f_{\tau_2^f-1} = i^* \text{ oder } X^{f,-}_{\tau_2^f} = i^*\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+E_{(i^*,p)_{\text{post}(3)}}\left(\tau_2^f-\tau_1^f|X^{f,-}_{\tau_2^f}=i^*,\right)P\left(X^{f,-}_{\tau_2^f}=i^*|X^f_{\tau_2^f-1}=i^*\,\text{oder}\,X^{f,-}_{\tau_2^f}=i^*\right)\\
=\;&(1-r)\sum_{n=2}^{\infty}nP_{(i^*,p)_{\text{post}(3)}}\left(X^f_{n-1}<X^{f,-}_n=i^*,X^f_n=0|\exists m\in I\!N:X^f_{m-1}<X^{f,-}_m=i^*,\,X^f_m=0\right)\\
&+r\sum_{n=1}^{\infty}nP_{(i^*,p)_{\text{post}(3)}}\left(X^f_{n-1}=i^*<X^{f,-}_n,X^f_n=0|\exists m\in I\!N:X^f_{m-1}=i^*<X^{f,-}_m,\,X^f_m=0\right)\\
=\;&(1-r)\sum_{n=2}^{\infty}nP_{i^*}\left(X^-_j<X^-_n=i^*\forall j\in\{1,...,n-1\},\,X_n=0\middle|\,\exists m\in I\!N:X^-_j<X^-_m=i^*\right.\\
&\forall j\in\{1,...,m-1\},\,X_m=0)+r\sum_{n=1}^{\infty}nP_{i^*+1}\left(X_j=i^*<X^-_n\;\forall j\in\{1,...,m-1\},X_n=0\middle|\right.\\
&\exists m\in I\!N:X_j=i^*<X_m\;\forall j\in\{1,...,m-1\},\,X_m=0\Big)\\
=\;&(1-r)E_{i^*}\left(\tau_2-\tau_1|X^-_{\tau_2}=i^*\right)+rE_{i^*+1}\left(\tau_2-\tau_1|X_{\tau_2-1}=i^*\right).\quad\blacksquare
\end{aligned}
$$

Satz 48 *Für alle Strategien δ, die die Ungleichung $\frac{\tilde\pi_\delta(N)}{\pi_\delta(0)}\le\epsilon_1$ erfüllen, existieren $j\in I$ und μ, $\mu_2\in[0,1]$, so daß gilt:*

$$
\begin{aligned}
\frac{\tilde\pi_{(j,\mu)_{\text{post}}}(N)}{\pi_{(j,\mu)_{\text{post}}}(0)}\le\epsilon_1 \quad &\textit{und}\quad \pi_{(j,\mu_2)_{\text{post}}}(0)=\pi_\delta(0);\\
\frac{\tilde\pi_{(j,\mu_2)_{\text{post}(2)}}(N)}{\pi_{(j,\mu_2)_{\text{post}(2)}}(0)}\le\epsilon_1 \quad &\textit{und}\quad \pi_{(j,\mu_2)_{\text{post}(2)}}(0)=\pi_\delta(0).
\end{aligned}
$$

Nach dem **Beweis** des letzten Satzes gibt es ein j aus I mit $\pi_{\delta_{j+1}}(0)\le\pi_\delta(0)\le\pi_{\delta_j}(0)$. Wegen $\delta_j=\delta_{(j,0)_{post(2)}}$, $\delta_{j+1}=\delta_{(j,1)_{post(2)}}$ und der Tatsache, daß $\pi_{(j,\mu)_{post(2)}}(0)$ eine nach Lemma 33 in μ auf dem Einheitsintervall stetige, monoton nicht-wachsende Funktion ist, existiert ein μ_2 auf dem Einheitsintervall mit $\pi_\delta(0)\;=\;\pi_{(j,\mu_2)_{post(2)}}(0)$.
Nach dem letzten Lemma existiert ein λ aus dem Einheitsintervall, so daß mit $c:=c_{j+1}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\pi_{(j,\mu_2)_{post(2)}}(0)(1-p_{00})+c\tilde\pi_{(j,\mu_2)_{post(2)}}(N) &= \phi_{(j,\mu_2)_{post(2)}}(c)\overset{\text{Lemma 36}}{=}\phi_{(j,\lambda)_{pre}}(c)\\
&= \pi_{(j,\lambda)_{pre}}(0)(1-p_{00})+c\tilde\pi_{(j,\lambda)_{pre}}(N)\\
&\le \pi_\delta(0)(1-p_{00})+c\tilde\pi_\delta(N).
\end{aligned}
$$

Die letzte Ungleichung steht in dem Beweis des letzten Satzes, da für alle λ aus dem Einheitsintervall und alle $i\in I$ die folgenden zwei Identitäten gelten:

$$\pi_{(j,\lambda)_{pre}}(i)=\lambda\pi_{\delta_j}(i)+(1-\lambda)\pi_{\delta_{j+1}}(i)\text{ und }\tilde\pi_{(j,\lambda)_{pre}}(i)=\lambda\tilde\pi_{\delta_j}(i)+(1-\lambda)\tilde\pi_{\delta_{j+1}}(i).$$

Aus $\pi_{(j,\mu_2)_{post(2)}}(0)=\pi_\delta(0)$ folgt $\tilde\pi_{(j,\mu_2)_{post(2)}}(N)\le\tilde\pi_\delta(N)$, so daß die folgende Abschätzung möglich ist:

$$\frac{\tilde\pi_{(j,\mu_2)_{post(2)}}(N)}{\pi_{(j,\mu_2)_{post(2)}}(0)}\le\frac{\tilde\pi_\delta(N)}{\pi_\delta(0)}\le\epsilon_1.$$

Den gleichen Beweis kann man auch für die post-randomisierte bang-bang Strategie erster Art durchführen, mit der Ungleichung

$$\pi_{(j,\mu)_{post}}(0)(1-p_{00})+c\tilde{\pi}_{(j,\mu)_{post}}(N) = \phi_{(j,\mu)_{post}}(c) \overset{\text{Lemma 36}}{\leq} \phi_{(j,\lambda)_{post}}(c) \leq \pi_\delta(0)(1-p_{00})+c\tilde{\pi}_\delta(N).$$

Somit ist auch dieser Satz vollständig bewiesen. ■

Unter Verwendung des Ersetzungs-Modells konnten die letzten beiden Sätze gezeigt werden. Der erste besagt, daß man zu jeder Strategie aus der Klasse $\tilde{\Pi}_3 := \{\delta \in \Pi_3 : \frac{\tilde{\pi}_\delta(N)}{\pi_\delta(0)} \leq \epsilon_1\}$ eine pre-randomisierte bang-bang Strategie aus dieser Klasse finden kann, die denselben zu minimierenden Wert $\frac{1}{\pi_\delta(0)(1-p_{00})}$ liefert. Der zweite besagt, daß man zu jeder Strategie aus dieser Klasse eine post-randomisierte bang-bang Strategie erster und eine zweiter Art mit der gleichen Eigenschaft finden kann. Also gibt es sowohl eine pre-randomisierte als auch eine post-randomisierte bang-bang Strategie, die in dieser Klasse eine optimale Zykluslänge liefert. Beide Strategien haben den gleichen Schwellenwert, aber in der Regel unterschiedliche Werte für die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

Dieses Modell kann auch auf einem abzählbaren Zustandsraum $\mathbb{Z}^+$ unter den gleichen Voraussetzungen an die Größen auf $\mathbb{Z}^+$ betrachtet werden. Ein System wird als 'kritisch' angesehen, wenn sein Zustand größergleich N ist. Man kann dieses System dann auf ein System mit Zustandsraum $\{0, ..., N\}$ transformieren: Die Zustände $N \cup N+1 \cup ...$ verschmelzen zum Zustand N, die Wahrscheinlichkeiten $\tilde{p}_{ij}$ des neuen Modells werden wie folgt definiert: $\tilde{p}_{iN} := \sum_{j=N}^{\infty} p_{ij}$, $\tilde{p}_{ij} := 0 \, \forall j > N$. Mit $\sum_{j=k}^{\infty} p_{ij} \uparrow (i) \; \forall k \in \mathbb{Z}^+$ gilt auch $\sum_{j=k}^{N} p_{ij} \uparrow (i) \; \forall k \in \{0, 1, ..., N\}$. Somit ist dieses verallgemeinerte Modell auf ein hier behandeltes Modell zurückgeführt worden.

Konstruktion der optimalen Strategie

Im letzten Kapitel wurde gezeigt, daß es sowohl eine pre-randomisierte Strategie gibt, die optimal ist, als auch eine post-randomisierte erster und zweiter Art. In diesem Kapitel sollen diese beiden Strategien bestimmt werden. Begonnen wird mit der Konstruktion der optimalen pre-randomisieren bang-bang Strategie:
Aus der in Lemma 33 beschriebenen Monotonie der Wahrscheinlichkeiten $\pi_{i^*}(0)$ und $\tilde{\pi}_{i^*}(N)$ in i^* folgt auf Grund der Darstellungen

$$\pi_{(i^*,p)_{pre}}(i) = (1-p)\pi_{i^*}(i) + p\pi_{i^*+1}(i) \quad \text{und} \quad \tilde{\pi}_{(i^*,p)_{pre}}(i) = (1-p)\tilde{\pi}_{i^*}(i) + p\tilde{\pi}_{i^*+1}(i)$$

die Monotonie von $\pi_{(i^*,p)_{pre}}(0)$ und $\tilde{\pi}_{(i^*,p)_{pre}}(N)$ in i^* und p. Somit sind $\frac{\tilde{\pi}_{(i^*,p)_{pre}}(N)}{\pi_{(i^*,p)_{pre}}(0)}$ und $\frac{1}{\pi_{(i^*,p)_{pre}}(0)}$ monoton nicht-fallend sowohl in i^* als auch in p. Da der erste Term ϵ_1 nicht überschreiten darf und der zweite maximiert werden soll, sind Parameter

i^* und p gesucht, die die Gleichung $\frac{\tilde{\pi}_{(i^*,p)_{pre}}(N)}{\pi_{(i^*,p)_{pre}}(0)} = \epsilon_1$ erfüllen. Daraus ergibt sich

$$i^* = \max\left\{ i \,\middle|\, \frac{\tilde{\pi}_i(N)}{\pi_i(0)} \leq \epsilon_1 \right\} \text{ und } p: \ \frac{(1-p)\tilde{\pi}_{i^*}(N) + p\tilde{\pi}_{i^*+1}(N)}{(1-p)\pi_{i^*}(0) + p\pi_{i^*+1}(0)} = \epsilon_1,$$

$$\text{also } p = \frac{\epsilon_1 \pi_{i^*+1}(0) - \tilde{\pi}_{i^*+1}(N)}{(\tilde{\pi}_{i^*}(N) - \tilde{\pi}_{i^*+1}(N)) - \epsilon_1(\pi_{i^*}(0) - \pi_{i^*+1}(0))}.$$

Somit ist die optimale pre-randomisierte bang-bang Strategie ermittelt.
Bei der Berechnung der optimalen post-randomisierten Strategien müssen nur noch die zweiten Parameter berechnet werden, da der erste Parameter i^* mit der optimalen pre-randomisierten Strategie übereinstimmt. Der Parameter q der post-randomisierten Strategie zweiter Art ergibt sich aus dem Lemma 36:

$$p = 0 \Leftrightarrow q = 0 \quad \text{sonst} \quad p = \frac{\frac{q}{\pi_{i^*+1}(0)}}{\frac{1-q}{\pi_{i^*}(0)} + \frac{q}{\pi_{i^*+1}(0)}} \quad \Leftrightarrow \quad q = \frac{\pi_{i^*+1}(0)}{\pi_{i^*+1}(0) - (1 - \frac{1}{p})\pi_{i^*}(0)}.$$

Schließlich ist noch der Parameter p der post-randomisierten Strategie erster Art zu bestimmen. Hierbei wird die in Lemma 33 gezeigte Stetigkeit der stationären Wahrscheinlichkeiten $\pi_{(i,p)_{post}}$ ausgenutzt:

$$q_0 := p, \quad q_1 := \begin{cases} 1 & \text{wenn} \quad \frac{\tilde{\pi}_{(i,q_0)_{post}}(N)}{\pi_{(i,q_0)_{post}}(0)} < \epsilon_1, \\ 0 & \text{wenn} \quad \frac{\tilde{\pi}_{(i,q_0)_{post}}(N)}{\pi_{(i,q_0)_{post}}(0)} > \epsilon_1, \\ p \text{ gefunden} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wie aus Lemma 33 hervorgeht, ermitteln sich die stationären Wahrscheinlichkeiten $\left(\pi_{(i,p)_{post}}(j)\right)_{j\in I}$ und $\left(\tilde{\pi}_{(i,p)_{post}}(j)\right)_{j\in I}$ als Lösung der LGSe

$$\begin{pmatrix} \tilde{q}_{00}^{(i^*,p)_{post}} - 1 & \tilde{q}_{10}^{(i^*,p)_{post}} & \cdots & \tilde{q}_{N0}^{(i^*,p)_{post}} \\ \tilde{q}_{01}^{(i^*,p)_{post}} & \tilde{q}_{11}^{(i^*,p)_{post}} - 1 & \cdots & \tilde{q}_{N0}^{(i^*,p)_{post}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{q}_{0N}^{(i^*,p)_{post}} & \tilde{q}_{1N}^{(i^*,p)_{post}} & \cdots & \tilde{q}_{NN}^{(i^*,p)_{post}} - 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\pi}_{(i^*,p)_{post}}(0) \\ \tilde{\pi}_{(i^*,p)_{post}}(1) \\ \vdots \\ \tilde{\pi}_{(i^*,p)_{post}}(N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{und} \begin{pmatrix} q_{00}^{(i^*,p)_{post}} - 1 & q_{10}^{(i^*,p)_{post}} & \cdots & q_{i^*0}^{(i^*,p)_{post}} \\ q_{01}^{(i^*,p)_{post}} & q_{11}^{(i^*,p)_{post}} - 1 & \cdots & q_{i^*0}^{(i^*,p)_{post}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{0i^*}^{(i^*,p)_{post}} & q_{1i^*}^{(i^*,p)_{post}} & \cdots & q_{i^*i^*}^{(i^*,p)_{post}} - 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_{(i^*,p)_{post}}(0) \\ \pi_{(i^*,p)_{post}}(1) \\ \vdots \\ \pi_{(i^*,p)_{post}}(i^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit den Elementen $\tilde{q}_{ij}^{(i^*,p)_{post}} = \begin{cases} p_{ij} & \text{wenn} \quad i < i^*, \\ pp_{i^*j} + (1-p) \cdot p_{0j} & \text{wenn} \quad i = i^*, \\ p_{0j} & \text{wenn} \quad i > i^*; \end{cases}$

und $q_{ij}^{(i^*,p)_{post}} = p_{ij}\left(1_{\{0<j<i^*\}} + p1_{\{j=i^*\}}\right) + 1_{\{j=0\}}\left(p_{i0} + (1-p)\cdot p_{ii^*} + \sum_{j=i^*+1}^{N} p_{ij}\right)$ für alle i aus $\{0, ..., i^*\}$.

Der Prozeß $\{X_n,\, n \in \mathbb{Z}^+\}$ lebt unter Verwendung der Strategie $(i^*, p)_{post}$ nur auf $\{0, ..., i^*\}$, so daß die Wahrscheinlichkeiten p_{ij} mit $i > i^*$ nicht existieren. Mit dem regula-falsi-Verfahren kann nun die gesuchte Nullstelle p der Funktion $g(\tilde{p}) := \frac{\tilde{\pi}_{(i,\tilde{p})_{post}}(N)}{\pi_{(i,\tilde{p})_{post}}(0)} - \epsilon_1$ mit den Startwerten q_0 und q_1 berechnet werden, da $g(q_0) \cdot g(q_1) < 0$ gilt, falls sie nicht schon im ersten Schritt gefunden wurde.

Beispiele

In diesem Kapitel werden vom Computer berechnete Beispiele optimaler Strategien zur Lösung dieses Problems angegeben. Zum einen wurden sie durch den zuletzt angegeben Algorithmus berechnet und zum anderen durch Simulation ermittelt. Die Werte p waren bis auf einen absoluten Fehler von höchstens $\frac{1}{1000}$ identisch, wenn bei $n \leq 10$ ($n = 100$) 5000 (25000) Durchläufe mit jeweiliger Länge von 15000 (25000) Zeiteinheiten analysiert wurden. Es wird die folgende Klasse von Übergangswahrscheinlichkeiten betrachtet:

$$\tilde{p}_{ij} = \begin{cases} \left(\frac{i+1}{j+1}\right)^{\delta} - \left(\frac{i+1}{j+2}\right)^{\delta} & j \geq i, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Wahrscheinlichkeiten erfüllen auf $\mathbb{Z}^+$ die Eigenschaft der Markovschen Bedingung, und daher gilt dies auch für die hier benutzten Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{ij} = \begin{cases} \tilde{p}_{ij} & j < N, \\ \sum_{k=n}^{\infty} \tilde{p}_{ik} & j = N, \end{cases} \quad \text{auf dem Raum } I.$$

In der folgenden Tabelle sind für einige Beispiele die optimalen Strategien $(i^*, p)_{pre}$, $(i^*, p)_{post}$ und $(i^*, p)_{post(2)}$ angegeben:

N	δ	ϵ_0	p_{0N}	i^*	$p:(i^*,p)_{pre}$	$p:(i^*,p)_{post}$	$p:(i^*,p)_{post(2)}$
2	0.75	0.75	0.738	1	0.056	0.062	0.047
2	0.75	0.9	0.738	1	0.663	0.687	0.619
2	0.75	0.99	0.738	1	0.968	0.972	0.962
10	0.5	0.5	0.426	1	0.793	0.802	0.768
10	0.5	0.9	0.426	7	0.915	0.917	0.912
10	0.5	0.99	0.426	9	0.789	0.793	0.785
100	0.75	0.1	0.053	3	0.710	0.728	0.694
100	0.75	0.25	0.053	14	0.908	0.911	0.907
100	0.75	0.5	0.053	39	0.082	0.084	0.082
100	0.75	0.75	0.053	67	0.824	0.825	0.824
100	0.75	0.99	0.053	98	0.656	0.658	0.656
100	0.9	0.1	0.029	6	0.827	0.838	0.821
100	0.9	0.25	0.029	20	0.648	0.656	0.646
100	0.9	0.5	0.029	45	0.758	0.760	0.758
100	0.9	0.9	0.029	88	0.842	0.844	0.842
100	0.9	0.99	0.029	98	0.879	0.879	0.878
100	1.0	0.05	0.02	4	0.053	0.059	0.050
100	1.0	0.5	0.02	49	0.501	0.505	0.500
100	1.0	0.9	0.02	89	0.900	0.901	0.900
100	1.0	0.99	0.02	98	0.990	0.990	0.990
100	2.0	0.001	0.0004	2	0.192	0.269	0.172
100	2.0	0.01	0.0004	9	0.098	0.114	0.096
100	2.0	0.1	0.0004	30	0.938	0.942	0.938
100	2.0	0.9	0.0004	94	0.816	0.819	0.816
100	2.0	0.99	0.0004	99	0.493	0.497	0.492

Die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij} = \frac{1}{N-i-1} \cdot 1_{\{j \geq i\}}$ liefern ebenfalls Ergebnisse, bei denen die Werte p von $(i^*, p)_{post}$ geringfügig über denen von $(i^*, p)_{pre}$ liegen und die Werte p von $(i^*, p)_{pre}$ wiederum geringfügig über denen von $(i^*, p)_{post(2)}$.
Da der Übergang von der post-randomisierten Strategie erster Art zur post-randomisierten Strategie zweiter Art mit gleichen Parametern eine Vergrößerung von $\pi_\delta(0)$ bzw. eine Verkleinerung von $\tilde{\pi}_\delta(N)$ zur Folge hat, kann der Parameter p der post-randomisierten Strategie erster Art nie kleiner sein als der entsprechende Parameter der

post-randomisierten Strategie zweiter Art. An der Gleichung

$$p = 0 \Leftrightarrow q = 0, \quad \text{sonst} \quad p = \frac{\frac{q}{\pi_{i^*+1}(0)}}{\frac{1-q}{\pi_{i^*}(0)} + \frac{q}{\pi_{i^*+1}(0)}},$$

in der q der Parameter der post-randomisierten Strategie zweiter Art und p der Parameter der pre-randomisierten Strategie ist, erkennt man sofort, daß der Parameter q der post-randomisierten Strategie zweiter Art nie größer sein kann als der entsprechende Parameter der pre-randomisierten Stategie. Das liegt an der Monotonie von $\pi_{i^*}(0)$ in i^*.

Wenn $\frac{\tilde{\pi}_{(i^*,p)_{post}}}{\pi_{(i^*,p)_{post}}} \overset{(\geq)}{\leq} \frac{\tilde{\pi}_{(i^*,p)_{pre}}}{\pi_{(i^*,p)_{pre}}} \forall i \in I, \forall p \in [0,1]$ ist, dann ist der Parameter der post-randomisierten bang-bang Strategie erster Art offensichtlich immer größergleich (kleinergleich) dem entsprechenden Parameter der pre-randomisierten bang-bang Strategie. Bei der folgenden Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$\begin{pmatrix} p_{02} = 0.4 & p_{12} = 0.67 & p_{22} = 1 \\ p_{01} = 0.5 & p_{11} = 0.33 & p_{21} = 0 \\ p_{00} = 0.1 & p_{10} = 0 & p_{20} = 0 \end{pmatrix}$$

für $N = 2$ ergibt sich für $\epsilon_1 = 0.5$ als optimale pre-randomisierte bang-bang Strategie (1, 0.162), als optimale post-randomisierte bang-bang Strategie erster Art (1, 0.142) und als post-randomisierte bang-bang Strategie zweiter Art (1, 0.100). Der Parameter p der pre-randomisierten Strategie ist also in diesem Fall tatsächlich größer als der entsprechende Parameter der post-randomisierten Strategie erster Art.

Kapitel 5

Das System mit randomisierten Wartungsabständen

In den folgenden zwei Kapiteln wird ein Reparaturmodell vorgestellt, das sich von den vorherigen wie folgt unterscheidet: Bei diesem Modell wird näher präzisiert, wie es zu der Zustandsänderung kommt. In dem ersten Modell wurde angenommen, daß es sich von einem Zeitintervallanfang zum nächsten mit Markovschem Verhalten verschlechtert, ohne genau darauf einzugehen, wie dieser Vorgang innerhalb des Zeitintervalls zustande kommt. Bei diesem Modell ist die Frage geklärt: Die Verschlechterung geht stoßweise vor sich, also in einzelnen Zeitpunkten und ist daher deutlich bemerkbar. So kann auch die Steuerung verändert werden, indem sofort danach inspiziert und gegebenenfalls repariert wird. Eine stoßweise erfolgende Veränderung wird in der Literatur oft als 'shock' bezeichnet. Bei diesem Modell hat man die gleichen Übergangswahrscheinlichkeiten wie beim ersten Modell zur Verfügung, die nur in Abhängigkeit des derzeitigen Zustandes Auskunft über die Größe der Veränderung geben. Außerdem hat man stochastische Informationen über den Zeitraum, über den das System in einem Zustand verweilt, bis es eine negative Veränderung erfährt: Diese ist exponentialverteilt mit einem Parameter, der ebenfalls nur von dem derzeitigen Zustand abhängt.
Der Zustandsraum I stimmt mit dem des ersten Modells überein. Als nächstes werden die folgenden Zufallsvariablen definiert:
Die Zufallsvariable T_n^δ gebe unter der Strategie $\delta \in \Pi_1$ den n-ten Inspektionszeitpunkt an, für alle n aus $I\!N$ mit $T_0^\delta := 0$.
Die Zufallsvariable τ_n^δ gibt für alle $n \in I\!N$ die Zeit an, die der Prozeß unter δ im Zustand X_{n-1} verweilt; es gilt also die Beziehung $\tau_n^\delta := T_n^\delta - T_{n-1}^\delta$. Auch bei den Zufallsvariablen T_n^δ und τ_n^δ wird i. f. aus Übersichtsgründen das δ weggelassen, wenn diese Informationsangabe redundant ist.
Abschließend finden noch die Kosten Erwähnung: Die Funktion r gibt – wie in Kapitel 2 – die Kosten an, die in Abhängigkeit vom Systemzustand, in dem sich der Kunde befindet, pro Zeiteinheit (!) entstehen. Diese werden auch hier nachschüssig zusammen

mit der nächsten Reparatur beglichen, so daß nach der n-ten Periode die Betriebskosten $\tau_{n+1} \cdot r(X_n)$ zu begleichen sind. Die Reparaturkosten unterscheiden sich nicht vom ersten Modell.
Die zu Seite 15 analoge Skizze ist hier von folgender Gestalt:

Zeit	T_n		T_{n+1}^-		T_{n+1}
Zufallsvariable	X_n		X_{n+1}^-		X_{n+1}
Zustand	i	$\longrightarrow$	j	$\xrightarrow{A_{n+1}=a}$	$j-a$
Wahrscheinlichkeit		p_{ij}		$q_j^\delta(a)$	
Kosten			$\tau_{n+1} \cdot r(i)$		$d(j,a)$
Kostenbezeichnung			Betriebskosten		Reparaturkosten

Die Folge $(\lambda_i)_{i\in I}$ von positiven reellen Zahlen gibt für jeden Zustand i den Parameter der Exponentialverteilung an, nach der die Aufenthaltszeit im Zustand i verteilt ist. Das Supremum c dieser Folge existiere in $I\!R^+$. Somit gilt für alle natürlichen Zahlen n:

$$P(\tau_n \geq x|X_{n-1}=i) = exp(-\lambda_i x).$$

Daraus folgt $\quad E(\tau_n|X_{n-1}=i) = \lambda_i^{-1} \geq c^{-1} \;\forall i \in I,$

und somit ist $\quad E(\tau_n) \geq c^{-1}, \qquad$ so daß $\qquad E(T_n) = \sum_{i=1}^{n} E(\tau_n) \;\geq\; \frac{n}{c}$ folgt.

Daraus ergibt sich $\lim_{n\to\infty} E(T_n) = \infty$. Außerdem ist T_n stochastisch größer als eine $\left(n, \frac{1}{c}\right)$ $-$Erlang-verteilte Zufallsvariable $\tilde{T}_n$. Somit gilt $\lim_{n\to\infty} P(T_n < t)$
$\leq \lim_{n\to\infty} P\left(\tilde{T}_n < t\right) = 0 \;\forall t \in I\!R^+$. So tritt das Explosionsproblem fast sicher nicht auf, die Inspektionszeitpunkte häufen sich also fast sicher vor keinem Zeitpunkt. Schon jetzt wird die folgende Bedingung an das System gestellt:

Voraussetzung (0): Die Folge der λ_i ist in $i \in I$ monoton nicht-fallend.

Diese Voraussetzung besagt, daß der Zeitraum, nach dem die nächste Verschlechterung erwartet wird, umso kürzer ist, je höher bzw. schlechter der Systemzustand vorher war. In der Praxis ist auch damit zu rechnen, daß ein besseres System länger ohne Verschlechterung arbeitet, als eines mit größerer Abnutzung. Die Beschränktheit der Folge (λ_i) wiederum besagt, daß die erwartete Zeit zwischen zwei Inspektionen nach unten durch die positive Größe $\frac{1}{c}$ beschränkt ist.

Hier ist für das weitere Geschehen die folgende Wahrscheinlichkeit von Interesse:

$$P_\delta\left(X_{n+1}=j, \tau_{n+1} \leq x|X_0, \tau_0, A_0, \cdots, X_{n-1}, \tau_{n-1}, A_{n-1}, X_n = i\right)$$

$$= (1 - exp(-\lambda_i x)) \sum_{k=j}^{N} p_{ik} q_k^\delta(k-j) \; f.s.$$

5.1 Der diskontierte Fall

Die Kosten sind in diesem Abschnitt wieder mit dem Diskontierungsfaktor $\alpha \in (0,1)$ versehen. Zunächst werden an sie ähnliche Beschränktheitsvoraussetzungen wie bei dem ersten Modell gestellt:

Bedingung A: $\exists B_i \in I\!R, \kappa_i \in I\!N$:

$$\sum_{j=i}^{N} p_{ij}^{(n)} \left(\max_{\{0 \le k_1 \le k_2 \le j\}} \{|d(k_2,k_1)|\} + \max_{\{0 \le k \le j\}} \{|r(k)|\} \sum_{l=0}^{j} \frac{1}{\lambda_l} \right) < B_i n^{\kappa_i} \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Außerdem sei auch in diesem Kapitel die Dermansche Bedingung erfüllt:

$\sum_{j=k}^{N} p_{ij}$ ist monoton nicht-fallend in $i \in I$ für alle $k \in I$.

Da die Folgen der Zufallsvariablen $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(X_n^-)_{n=1}^{\infty}$ die gleiche Verteilung haben wie die entsprechenden Folgen des ersten Modells dieser Arbeit, kann das erste Lemma des Modells mit äquidistanten Inspektionszeitpunkten direkt übernommen werden:

Lemma 37

1. *Aus* $X_0^{\delta_\infty} = X_0^\delta$ *folgt* $\left(X_n^{\delta_\infty} \overset{st}{\ge} X_n^\delta \; \forall n \in I\!N \text{ und } X_n^{\delta_\infty,-} \overset{st}{\ge} X_n^{\delta,-} \; \forall n \in I\!N \right)$.

2. *Es sei* Z_n^δ *eine von dem übrigen Geschehen unabhängige* $(n, \lambda_{X_n^\delta})$*-Erlang-verteilte Zufallsvariable. Dann gilt:* $T_n^\delta \ge T_n^{\delta_\infty} \ge Z_n^{\delta_\infty}. \quad \forall \delta \in \Pi_1.$

Der zweite Teil dieses Lemmas folgt direkt aus der Voraussetzung (0). ■

Im Vergleich zu dem ersten Modell tritt ein weiterer Unterschied zutage, wenn man sich mit den diskontierten Kosten befaßt. Diese sind hier durch die folgende Wertfunktion definiert:

$$V_{\delta,\alpha}(i) = E_\delta \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{T_{n+1}} c_\delta(n) \middle| X_0 = i \right) \quad \text{mit} \quad c_\delta(n) = \tau_{n+1} r(X_n) + d(X_{n+1}^-, \delta(X_{n+1}^-)),$$

da die Kostenfunktion r die Betriebskosten **pro Zeitintervall** angibt. Als nächstes wird die Wohldefiniertheit dieser Wertfunktion gezeigt, die auch folgendermaßen dargestellt werden kann:

$$V_{\delta,\alpha}(i) = E_\delta \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{T_{n+1}} \left(\tau_{n+1} r(X_n) + \sum_{j=0}^{N} P(X_{n+1}^- = j | X_n) \sum_{a=0}^{j} d(j,a) q_j^\delta(a) \right) \middle| X_0 = i \right).$$

Neben den Zufallsvariablen $(\tau_i)_{i\in I}$ und den im letzten Lemma vorgestellten Zufallsvariablen $(Z_n^\delta)_{n\in N}$ (das δ wird bei Klarheit auch hier weggelassen) werden i.f. auch die Folgen $(\tau(i))_{i\in I}$ und $(Z(n,i))_{i\in I,n\in N}$ unabhängiger Zufallsvariablen benutzt. Dabei stellt $\tau(i)$ einfach nur eine von dem übrigen Geschehen unabhängige exponential-verteilte Zufallsvariable mit Parameter λ_i dar und $Z(n,i)$ eine von dem übrigen Geschehen unabhängige $(n,\lambda_i)-$Erlang-verteilte Zufallsvariable. Somit gilt $T_1=\tau_1 \overset{D}{=} \tau(X_0)$:

$$\begin{aligned}
V_{\delta,\alpha}(i) &= E_\delta\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{T_{n+1}}\left(\tau_{n+1}r(X_n)+d(X_{n+1}^-,\delta(X_{n+1}^-))\right)\Big|\,X_0=i\right)\\
&= E_\delta\left(\alpha^{\tau(X_0)}\tau(X_0)r(X_0)\Big|\,X_0=i\right)\\
&\quad +E_\delta\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{T_n}\left(d(X_n^-,\delta(X_n^-))+\alpha^{\tau_{n+1}}\tau_{n+1}r(X_n)\right)\Bigg|\,X_0=i\right)\\
\Rightarrow |V_{\delta,\alpha}(i)| &\le |r(i)|E\left(\alpha^{\tau(i)}\tau(i)\right)\\
&\quad +E_\delta\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{T_n}\left(|d(X_n^-,\delta(X_n^-))|+\alpha^{\tau(X_n)}\tau(X_n)|r(X_n)|\right)\Big|\,X_0=i\right)\\
&\le |r(i)|E\left(\alpha^{\tau(i)}\tau(i)\right)
\end{aligned}$$

$$+E_\delta\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{T_n}\left(\max_{\{0\le k_1\le k_2\le X_n^-\}}\{|d(k_2,k_1)|\}+\max_{\{0\le k\le X_n\}}\{\tau(k)|r(k)|\}\right)\Bigg|\,X_0=i\right)$$

$$\overset{\text{Lemma 37(1)}}{\le} |r(i)|E\left(\alpha^{\tau(i)}\tau(i)\right)$$

$$+E_{\delta_\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{T_n}\left(\max_{\{0\le k_1\le k_2\le X_n^-\}}\{|d(k_2,k_1)|\}+\max_{\{0\le k\le X_n\}}\{\tau(k)|r(k)|\}\right)\Bigg|\,X_0=i\right)$$

$$\overset{\text{Lemma 37(2)}}{\le} |r(i)|E\left(\alpha^{\tau(i)}\tau(i)\right)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}E_{\delta_\infty}\left(\alpha^{Z_n}\left(\max_{\{0\le k_1\le k_2\le X_n^-\}}\{|d(k_2,k_1)|\}+\max_{\{0\le k\le X_n\}}\{|r(k)|\}\max_{\{0\le k\le X_n\}}\{\tau(k)\}\right)\Bigg|\,X_0=i\right)$$

$$\begin{aligned}
= |r(i)|E\left(\alpha^{\tau(i)}\tau(i)\right)+\sum_{n=1}^{\infty}E_{\delta_\infty}\Bigg[E\Bigg(\alpha^{Z_n}\Bigg(&\max_{\{0\le k_1\le k_2\le X_n\}}\{|d(k_2,k_1)|\}\\
&+\max_{\{0\le k\le X_n\}}\{|r(k)|\}\max_{\{0\le k\le X_n\}}\{\tau(k)\}\Bigg)\Bigg|\,X_n\Bigg)\Bigg|\,X_0=i\Bigg]
\end{aligned}$$

$$= |r(i)|E\left(\alpha^{\tau(i)}\tau(i)\right)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N}p_{ij}^{(n)}E\left(\alpha^{Z(n,j)}\right)\left(\max_{\{0\le k_1\le k_2\le j\}}\{|d(k_2,k_1)|\}+\max_{\{0\le k\le j\}}\{|r(k)|\}E\left(\max_{\{0\le k\le j\}}\{\tau(k)\}\right)\right)$$

$$= |r(i)|E\left(\alpha^{\tau(i)}\tau(i)\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N}p_{ij}^{(n)}$$

$$\cdot E\left(\alpha^{Z(n,j)}\right)\left(\max_{\{0\leq k_1\leq k_2\leq j\}}\{|d(k_2,k_1)|\}+\sum_{l=0}^{j}\frac{1}{\lambda_l}\max_{\{0\leq k\leq j\}}\{|r(k)|\}\right),$$

da wegen der Positivität der Zufallsvariablen $\tau(0),...,\tau(j)$ gilt:

$$E\left(\max_{i\in\{0,...,j\}}\tau(i)\right)\leq E\left(\sum_{i=0}^{j}\tau(i)\right)=\sum_{i=0}^{j}E(\tau(i))=\sum_{i=0}^{j}\frac{1}{\lambda_i}.$$

Die Zufallsvariable $Z(j)$ hat die Dichte $f(t)=\frac{\lambda_j^n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\lambda_j t}$, so daß gilt:

$$\begin{aligned}E(\alpha^{Z(n,j)}) &= \int_0^\infty \frac{\lambda_j^n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\lambda_j t}\alpha^t\,dt\\ &= \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_j-\ln\alpha}\right)^n\int_0^\infty\frac{(\lambda_j-\ln\alpha)^n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-(\lambda_j-\ln\alpha)t}\,dt=\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_j-\ln\alpha}\right)^n.\end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}E\left(\alpha^{\tau(j)}\tau(j)\right) &= \int_0^\infty\alpha^x x\lambda_j e^{-\lambda_j x}dx=\frac{\lambda_j}{\lambda_j-\ln\alpha}\int_0^\infty x(\lambda_j-\ln\alpha)e^{-(\lambda_j-\ln\alpha)x}dx\\ &= \frac{\lambda_j}{(\lambda_j-\ln\alpha)^2},\ \text{so daß sich der folgende Satz ergibt:}\end{aligned}$$

Satz 49

$$|V_{\delta,\alpha}(i)|\leq|r(i)|\frac{\lambda_i}{(\lambda_i-\ln\alpha)^2}+\tilde{B}_i^\alpha<\infty\quad\forall i\in I\ \textit{mit}\ \tilde{B}_i^\alpha:=B_i\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c}{c-\ln\alpha}\right)^n n^{\kappa_i}.$$

Beweis: $|V_{\delta,\alpha}(i)|\leq|r(i)|\frac{\lambda_i}{(\lambda_i-\ln\alpha)^2}$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=i}^{N}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_j-\ln\alpha}\right)^n p_{ij}^{(n)}\left(\max_{\{0\leq k_1\leq k_2\leq j\}}\{|d(k_2,k_1)|\}+\sum_{l=0}^{j}\frac{1}{\lambda_l}\max_{\{0\leq k\leq j\}}\{|r(k)|\}\right)$$

$$<\quad|r(i)|\frac{\lambda_i}{(\lambda_i-\ln\alpha)^2}+B_i\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c}{c-\ln\alpha}\right)^n n^{\kappa_i}<\infty.\quad\blacksquare$$

Die Abschätzung $\dfrac{\lambda_i}{\lambda_i-\ln\alpha}\leq\dfrac{c}{c-\ln\alpha}\ \forall i\in I$ ergibt sich aus dem noch folgenden Lemma 44 (1), wegen $\lambda_i\leq c\ \forall i\in I$. Somit ist auch in diesem Modell die Funktion $V_{\delta,\alpha}$ für beliebige $\delta\in\Pi_1$ und $\alpha\in[0,1]$ wohldefiniert.
Für den Fall, daß sowohl die Betriebskostenfunktion r als auch die Reparaturkostenfunktion d monoton nicht-fallend ist (d in beiden Komponenten), vereinfacht sich die Bedingung A zu:

$$\exists B_i\in I\!R,\kappa_i\in I\!N:\sum_{j=i}^{N}p_{ij}^{(n)}\left(|d(j,j)|+|r(j)|\sum_{l=0}^{j}\frac{1}{\lambda_l}\right)<B_i n^{\kappa_i}\ \forall n\in I\!N.$$

Optimale Strategie und optimale Wertfunktion

In diesem Modell ergibt die Verwendung des Prinzips der dynamischen Programmierung für alle δ aus Π_1 das Folgende:

$$\begin{aligned}
V_{\delta,\alpha}(i) &= \int_0^\infty \alpha^x \left(x r(i) + \sum_{j=i}^N p_{ij}^{(n)} \sum_{a=0}^j q_j^\delta(a)\,(d(j,a) + V_{\delta,\alpha}(j-a))\right) \lambda_i e^{-\lambda_i x}\,dx \\
&= \int_0^\infty \alpha^x x \lambda_i e^{-\lambda_i x}\,dx \cdot r(i) \\
&\quad + \int_0^\infty \alpha^x \lambda_i e^{-\lambda_i x} dx \sum_{j=i}^N p_{ij}^{(n)} \sum_{a=0}^j q_j^\delta(a)\,(d(j,a) + V_{\delta,\alpha}(j-a)) \\
&= \int_0^\infty x \lambda_i e^{-(\lambda_i - \ln\alpha)x} dx \cdot r(i) \\
&\quad + \int_0^\infty \lambda_i e^{-(\lambda_i - \ln\alpha)x} dx \sum_{j=i}^N p_{ij}^{(n)} \sum_{a=0}^j q_j^\delta(a)\,(d(j,a) + V_{\delta,\alpha}(j-a)) \\
&= \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\alpha} \int_0^\infty x(\lambda_i - \ln\alpha) e^{-(\lambda_i - \ln\alpha)x} dx \cdot r(i) \\
&\quad + \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\alpha} \int_0^\infty (\lambda_i - \ln\alpha) e^{-(\lambda_i - \ln\alpha)x} dx \cdot \sum_{j=i}^N p_{ij} \sum_{a=0}^j q_j^\delta(a)\,(d(j,a) + V_{\delta,\alpha}(j-a)) \\
&= \frac{\lambda_i}{(\lambda_i - \ln\,\alpha)^2} r(i) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\,\alpha} \sum_{j=i}^N p_{ij} \sum_{a=0}^j q_j^\delta(a)\,(d(j,a) + V_{\delta,\alpha}(j-a))\,.
\end{aligned}$$

Ist die Strategie δ nicht-randomisiert, gilt hier also für die Funktion $V_{\delta,\alpha}$ die folgende Funktionalgleichung:

$$V_{\delta,\alpha}(i) = \frac{\lambda_i}{(\lambda_i - \ln\,\alpha)^2} r(i) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\,\alpha} \sum_{j=i}^N p_{ij}(d(j,\delta(j)) + V_{\delta,\alpha}(j - \delta(j)).$$

Auch in diesem Modell ist $V_\alpha := \min_{\{\delta\in\Pi_1\}}\{V_{\delta,\alpha}\}$ und $V_\alpha^b := \min_{\{\delta\in\Pi_1^b\}}\{V_{\delta,\alpha}\}$.

Satz 50 *Die Optimalitätsgleichung sieht folgendermaßen aus:*

$$V_\alpha(i) = \frac{\lambda_i}{(\lambda_i - \ln\,\alpha)^2} r(i) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\,\alpha} \sum_{j=i}^N p_{ij} \min_{a\in\{0,\ldots,j\}} \{d(j,a) + V_\alpha(j-a)\}\,.$$

Beweis: Für alle Strategien $\delta \in \Pi_1$ gilt offensichtlich die Ungleichung

$$V_{\delta,\alpha}(i) \geq \frac{\lambda_i}{(\lambda_i - \ln\,\alpha)^2} r(i) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\,\alpha} \sum_{j=i}^N p_{ij} \min_{a\in\{0,\ldots,j\}} \{d(j,a) + V_\alpha(j-a)\}\,.$$

Somit gilt auch

$$V_\alpha(i) \geq \frac{\lambda_i}{(\lambda_i - \ln\,\alpha)^2} r(i) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\,\alpha} \sum_{j=i}^N p_{ij} \min_{a\in\{0,\ldots,j\}} \{d(j,a) + V_\alpha(j-a)\}\,.$$

Im Unterschied zum Beweis von Satz 2 ist beim Beweis der Ungleichung '$\leq$' δ die Strategie, die bei der ersten Inspektion, also zur Zeit T_1^-, im Zustand j, $j \in I\!N$ die Aktion $a_0(j)$ wählt und danach einer Strategie δ^j folgt, für die gilt:
$V_{\delta^j,\alpha}(j) \leq V_\alpha(j) + \epsilon$, $\epsilon > 0$. Mit diesen Definitionen gilt:

$$\begin{aligned}
V_\alpha(i) &\leq V_{\delta,\alpha}(i) \\
&= \int_0^\infty \left(\alpha^x x r(i) + \sum_{j=i}^N \alpha^x p_{ij} \left(d(j, a_0(j) + V_{\delta^j,\alpha}(j - a_0(j)) \right) \lambda_i e^{-\lambda_i x} \right) dx \\
&= \frac{\lambda_i}{(\lambda_i - \ln\,\alpha)^2} r(i) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\,\alpha} \sum_{j=i}^N p_{ij} (d(j, a_0(j)) + V_{\delta^j,\alpha}(j - a_0(j))) \\
&\leq \frac{\lambda_i}{(\lambda_i - \ln\,\alpha)^2} r(i) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\,\alpha} \sum_{j=i}^N p_{ij} \min_{a \in \{0,\ldots,j\}} \{d(j,a) + V_\alpha(j-a)\} + \epsilon.
\end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt aus der zum Beweis von Satz 2 analogen Ungleichungskette. Der Grenzübergang $\epsilon \downarrow 0$ ergibt die Ungleichung '$\leq$'. Somit ist der Satz bewiesen. ∎

Die **Bedingung B** hat hier die folgende Gestalt:

Bedingung B: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{c}{c - \ln\alpha} \right)^n \sum\limits_{j=i}^N p_{ij}^{(n)} \left(\max\limits_{\{0 \leq k \leq j\}} \left\{ \frac{|r(k)|}{\lambda_k - \ln\alpha} + \tilde{B}_k^\alpha \right\} \right) = 0.$

Sind beide Kostenfunktionen monoton nicht-fallend (d in beiden Komponenten), so daß o.B.d.A. die Folge $(\tilde{B}_k^\alpha)$ ebenfalls monoton nicht-fallend ist – sonst nehme man $\tilde{B}_k^\alpha := \max_{\{0 \leq i \leq k\}} \{\tilde{B}_i^\alpha\}$ – reduziert sich diese Bedingung auf:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{c}{c - \ln\alpha} \right)^n \sum_{j=i}^N p_{ij}^{(n)} \left(\frac{r(j)}{\lambda_0 - \ln\alpha} + \tilde{B}_j^\alpha \right) = 0.$$

Lemma 38

1. *Wenn die Kostenfunktionen beschränkt sind, gibt es eine Folge $(\tilde{B}_k^\alpha)$, für die Bedingung B erfüllt ist.*
2. *Aus Bedingung B folgt* $\lim_{n\to\infty} E_\delta \left(\left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_{x_k}}{\lambda_{x_k} - \ln\alpha} \right) V_{\delta,\alpha}(X_n) \middle| X_0 = i \right) = 0$ $\forall \delta \in \Pi_1$, $\forall i \in I$.

Die erste Aussage des Lemmas ist auch bei diesem Modell wegen der Identität $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{c}{c - \ln\alpha} \right)^n = 0$ offensichtlich. Der **Beweis** des zweiten Teils sieht hier folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} E_\delta \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_{X_k}}{\lambda_{X_k} - \ln\alpha} |V_{\delta,\alpha}(X_n)| \middle| X_0 = i \right) \\
\overset{Satz\ 49}{\leq}\ &\lim_{n\to\infty} E_\delta \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_{X_k}}{\lambda_{X_k} - \ln\alpha} \left(|\, r(X_n) \,| \frac{\lambda_{X_n}}{(\lambda_{X_n} - \ln\alpha)^2} + \tilde{B}_{X_n}^\alpha \right) \middle| X_0 = i \right) \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \lim_{n\to\infty} E_\delta\left(\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda_{X_k}}{\lambda_{X_k}-\ln\alpha}\left(|r(X_n)|+\tilde{B}^\alpha_{X_n}\right)\middle| X_0=i\right) \text{ da } \frac{\lambda_{X_n}}{(\lambda_{X_n}-\ln\alpha)^2}\leq 1\\
&\leq \lim_{n\to\infty} E_\delta\left(\prod_{k=0}^{n-1}\max_{\{0\leq l\leq X_k\}}\left\{\frac{\lambda_l}{\lambda_l-\ln\alpha}\right\}\cdot\max_{\{0\leq l\leq X_n\}}\left\{|r(l)|+\tilde{B}^\alpha_l\right\}\middle| X_0=i\right)\\
&\overset{\text{Lemma 37}}{\leq} \lim_{n\to\infty} E_{\delta_\infty}\left(\prod_{k=0}^{n-1}\max_{\{0\leq l\leq X_k\}}\left\{\frac{\lambda_l}{\lambda_l-\ln\alpha}\right\}\cdot\max_{\{0\leq l\leq X_n\}}\left\{|r(l)|+\tilde{B}^\alpha_l\right\}\middle| X_0=i\right)\\
&\leq \lim_{n\to\infty} E_{\delta_\infty}\left(\left(\frac{c}{c-\ln\alpha}\right)^n\max_{\{0\leq k\leq X_n\}}\left\{|r(k)|+\tilde{B}^\alpha_k\right\}\middle| X_0=i\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{c}{c-\ln\alpha}\right)^n\sum_{j=i}^{N}p_{ij}^{(n)}\max_{\{0\leq k\leq n\}}\left\{|r(k)|+\tilde{B}^\alpha_k\right\}=0 \text{ nach Bedingung B.} \quad\blacksquare
\end{aligned}
$$

Während die Bezeichnungen

$$\mathcal{F}(I)=\{f|f:I\to I\!R\} \quad\text{und}\quad \mathcal{B}(I)=\{f\in\mathcal{F}(\mathcal{I}),\ f \text{ beschränkt}\}$$

aus dem ersten Modell übernommen werden, wird $\mathcal{U}(I)$ hier folgendermaßen umdefiniert:

$$\mathcal{U}(I):=\left\{u\in\mathcal{F}(I)\middle|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{c}{c-\ln\alpha}\right)^n\sum_{j=i}^{N}p_{ij}^{(n)}\max_{\{0\leq k\leq j\}}\{|u(k)|\}=0\ \forall i\in I\ \forall\alpha\in(0,1)\right\}.$$

Mit Hilfe dieser Klasse kann die Bedingung B in diesem Modell folgendermaßen äquivalent umgeformt werden:
Die Bedingung B ist äquivalent zu der Aussage, daß jede Funktion u_α mit

$u_\alpha(k)=\dfrac{|r(k)|}{\lambda_k-\ln\alpha}+\tilde{B}^\alpha_k$ in $\mathcal{U}(I)$ enthalten ist.

Einschließlich Beweis analog zu Lemma 3 gilt hier das

Lemma 39

1. *Für alle $u\in\mathcal{U}(I)$ gilt:* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{c}{c-\ln\alpha}\right)^n E_\delta(u(X_n)\mid X_0=i)=0\ \forall i\in I\ \forall\delta\in\Pi_1$.
2. *Unter der Bedingung B sind alle Funktionen $V_{\delta,\alpha}$ in $\mathcal{U}(I)$ enthalten und im Falle der Existenz auch Grenzfunktionen der Gestalt* $\lim_{n\to\infty}V_{\delta_n,\alpha}$ *mit* $\delta_n\in\Pi_1\ \forall n\in I\!N$.

Nun wird für $n\in I\!N$ die Funktion $V^{(n)}_{\delta,\alpha}(i):=E_\delta\left(\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^{T_{k+1}}c_\delta(k)\middle| X_0=i\right)$ auf I

eingeführt ($V^{(0)}_{\delta,\alpha}\equiv 0$), die die α-diskontierten Kosten bis zum Zeitpunkt T_n angibt. Das folgende Lemma gibt eine Rekursionsformel für diese Funktionen an:

Lemma 40 *Es gilt für alle $\delta\in\Pi_1,\ n\in Z\!\!Z^+,\ i\in I$:*

$$V^{(n+1)}_{\delta,\alpha}(i)=V^{(n)}_{\delta,\alpha}(i)+E_\delta\left(\Big(\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda_{x_k}}{\lambda_{x_k}-\ln\alpha}\Big)V^{(1)}_{\delta,\alpha}(X_n)\middle| X_0=i\right).$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
V_{\delta,\alpha}^{(n+1)}(i) &= V_{\delta,\alpha}^{(n)}(i) + E_\delta\left(\alpha^{T_n} c_\delta(n) \middle| X_0 = i\right) \\
&= V_{\delta,\alpha}^{(n)}(i) + E_\delta\left(\alpha^{\left(\sum_{k=1}^{n}\tau_k\right)} V_{\delta,\alpha}^{(1)}(X_n) \middle| X_0 = i\right) \\
&= V_{\delta,\alpha}^{(n)}(i) + E_\delta\left(\prod_{k=1}^{n} \alpha^{\tau(X_{k-1})} V_{\delta,\alpha}^{(1)}(X_n) \middle| X_0 = i\right) \\
&= V_{\delta,\alpha}^{(n)}(i) + E_\delta\left(E_\delta\left(\prod_{k=0}^{n-1} \alpha^{\tau(X_k)} V_{\delta,\alpha}^{(1)}(X_n) \middle| X_1, \ldots, X_{n-1}\right) \middle| X_0 = i\right)
\end{aligned}$$

$$= V_{\delta,\alpha}^{(n)}(i) + E_\delta\left[\left(\prod_{k=0}^{n-1} E_\delta\left(\alpha^{\tau(X_k)} \middle| X_k\right)\right) E_\delta\left(V_{\delta,\alpha}^{(1)}(X_n) \middle| X_1, \ldots, X_{n-1}\right) \middle| X_0 = i\right]$$

$$= V_{\delta,\alpha}^{(n)}(i) + E_\delta\left(\left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_{X_k}}{\lambda_{X_k} - \ln\alpha}\right) V_{\delta,\alpha}^{(1)}(X_n) \middle| X_0 = i\right).$$

Die Identität $E_\delta(\alpha^{\tau(X_k)} \mid X_k) = \frac{\lambda_{X_k}}{\lambda_{X_k} - \ln\alpha}$ wurde bereits beim Berechnen der Funktionalgleichung für $V_{\delta,\alpha}$ gezeigt. ■

Lemma 41 *Es gilt für die Strategie δ_α, die folgendermaßen definiert ist:*

$$d(j, \delta_\alpha(j)) + V_\alpha(j - \delta_\alpha(j)) = \min_{a \in \{0,\ldots,j\}} \{d(j,a) + V_\alpha(j-a)\} \quad \forall j \in I,$$

die folgende Identität:

$$V_\alpha(i) = V_{\delta_\alpha,\alpha}^{(n)}(i) + E_{\delta_\alpha}\left(\left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_{X_k}}{\lambda_{X_k} - \ln\alpha}\right) V_\alpha(X_n) \middle| X_0 = i\right) \quad \forall n \in I\!N.$$

Beweis durch vollständige Induktion:
$n = 1$: In diesem Modell ist die Optimalitätsgleichung von folgender Gestalt:

$$\begin{aligned}
V_\alpha(i) &= \frac{\lambda_i}{(\lambda_i - \ln\alpha)^2} r(i) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\alpha} \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \min_{a \in \{0,\ldots,j\}} \{d(j,a) + V_\alpha(j-a)\} \\
&= \frac{\lambda_i}{(\lambda_i - \ln\alpha)^2} r(i) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\alpha} \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \left(d(j, \delta_\alpha(j)) + V_\alpha(j - \delta_\alpha(j))\right) \\
&= \frac{\lambda_i}{(\lambda_i - \ln\alpha)^2} r(i) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\alpha} \sum_{j=i}^{N} p_{ij} d(j, \delta_\alpha(j)) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\alpha} \sum_{j=i}^{N} p_{ij} V_\alpha(j - \delta_\alpha(j)) \\
&= V_{\delta_\alpha,\alpha}^{(1)}(i) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\alpha} E_{\delta_\alpha}(V_\alpha(X_1) | X_0 = i) \\
&= V_{\delta_\alpha,\alpha}^{(1)}(i) + E_{\delta_\alpha}\left(\prod_{k=0}^{0} \frac{\lambda_{X_k}}{\lambda_{X_k} - \ln\alpha} V_\alpha(X_1) \middle| X_0 = i\right). \quad ■
\end{aligned}$$

$n \to n+1$: Aus dem Induktionsanfang folgt direkt bei Start in X_n^δ:

$$\begin{aligned} V_\alpha(X_n) &= V^{(1)}_{\delta_\alpha,\alpha}(X_n) + E_{\delta_\alpha}\left(\frac{\lambda_{X_n}}{\lambda_{X_n} - \ln\alpha} V_\alpha(X_{n+1}) \middle| X_n \right) \\ &= V^{(1)}_{\delta_\alpha,\alpha}(X_n) + \frac{\lambda_{X_n}}{\lambda_{X_n} - \ln\alpha} E_{\delta_\alpha}\left(V_\alpha(X_{n+1}) \middle| X_n \right). \end{aligned}$$

Somit gilt die Identität

$$\begin{aligned} &\left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_{X_k}}{\lambda_{X_k} - \ln\alpha}\right) V_\alpha(X_n) \\ &= \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_{X_k}}{\lambda_{X_k} - \ln\alpha}\right) V^{(1)}_{\delta_\alpha,\alpha}(X_n) + \left(\prod_{k=0}^{n} \frac{\lambda_{X_k}}{\lambda_{X_k} - \ln\alpha}\right) E_{\delta_\alpha}\left(V_\alpha(X_{n+1} \middle| X_n) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{also}\quad & E_{\delta_\alpha}\left(\left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_{X_k}}{\lambda_{X_k} - \ln\alpha}\right) V_\alpha(X_n) \middle| X_0 = i \right) \\ &= E_{\delta_\alpha}\left(\left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_{X_k}}{\lambda_{X_k} - \ln\alpha}\right) V^{(1)}_{\delta_\alpha,\alpha}(X_n) \middle| X_0 = i \right) \\ &\quad + E_{\delta_\alpha}\left(E_{\delta_\alpha}\left(\left(\prod_{k=0}^{n} \frac{\lambda_{X_k}}{\lambda_{X_k} - \ln\alpha}\right) V_\alpha(X_{n+1}) \middle| X_n \right) \middle| X_0 = i \right). \end{aligned}$$

Daher ist $E_{\delta_\alpha}\left(\left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_{X_k}}{\lambda_{X_k} - \ln\alpha}\right) V_\alpha(X_n) \middle| X_0 = i \right)$

$$\begin{aligned} &= E_{\delta_\alpha}\left(\left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_{X_k}}{\lambda_{X_k} - \ln\alpha}\right) V^{(1)}_{\delta_\alpha,\alpha}(X_n) \middle| X_0 = i \right) \\ &\qquad\qquad + E_{\delta_\alpha}\left(\left(\prod_{k=0}^{n} \frac{\lambda_{X_k}}{\lambda_{X_k} - \ln\alpha}\right) V_\alpha(X_{n+1}) \middle| X_0 = i \right). \end{aligned}$$

Diese Gleichung, in die Induktionsvoraussetzung eingesetzt, ergibt:

$$\begin{aligned} V_\alpha(i) &= V^{(n)}_{\delta_\alpha,\alpha}(i) + E_{\delta_\alpha}\left(\left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_{X_k}}{\lambda_{X_k} - \ln\alpha}\right) V^{(1)}_{\delta_\alpha,\alpha}(X_n) \middle| X_0 = i \right) \\ &\quad + E_{\delta_\alpha}\left(\left(\prod_{k=0}^{n} \frac{\lambda_{X_k}}{\lambda_{X_k} - \ln\alpha}\right) V_\alpha(X_{n+1}) \middle| X_0 = i \right) \\ &\overset{\text{Lemma 40}}{=} V^{(n+1)}_{\delta_\alpha}(i) + E_{\delta_\alpha}\left(\prod_{k=0}^{n} \frac{\lambda_{X_k}}{\lambda_{X_k} - \ln\alpha} V_\alpha(X_{n+1}) \middle| X_0 = i \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Der Existenzsatz sieht hier folgendermaßen aus:

Satz 51 über die Existenz der optimalen Strategie
Sei δ_α eine stationäre und deterministische Strategie, so daß

$$d(j, \delta_\alpha(j)) + V_\alpha(j - \delta_\alpha(j)) = \min_{a \in \{0,\ldots,j\}} \{d(j,a) + V_\alpha(j-a)\} \quad \forall j \in I \text{ gilt.}$$

Dann ist δ_α unter der zusätlichen Voraussetzung B optimal, es gilt also
$V_{\delta_\alpha,\alpha}(i) = V_\alpha(i) \quad \forall i \in I.$

Dieser Existenzsatz ist direkt durch den Grenzübergang $n \to \infty$ in der Aussage des Lemmas 41 unter Verwendung von Lemma 38(2) **bewiesen.** ■

Die Operatoren $T_{\delta,\alpha}$ und $T_\alpha : \mathcal{F}(I) \to \mathcal{F}(I)$ erfahren die folgende Änderung:

$$\begin{aligned}(T_{\delta,\alpha}(u))(i) &:= \frac{\lambda_i}{(\lambda_i - \ln\,\alpha)^2} r(i) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\,\alpha} \sum_{j=i}^{N} p_{ij}(d(j,\delta(j)) + u(j-\delta(j)),\\ (T_\alpha(u))(i) &:= \frac{\lambda_i}{(\lambda_i - \ln\,\alpha)^2} r(i) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\,\alpha} \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \min_{a\in\{0,\ldots,j\}} \{d(j,a) + u(j-a)\}\,.\end{aligned}$$

Lemma 42 *Der Operator T_α ist kontrahierend auf $\mathcal{B}(I)$.*

Beweis: Es seien $u, v \in B(I)$ und $a_0 \in \{0, ..., j\}$ so gewählt, daß

$$d(j,a_0) + v(j-a_0) = \min_{a\in\{0,\ldots,j\}} \{d(j,a) + v(j-a)\} \text{ gilt.}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} & T_\alpha u(i) - T_\alpha v(i) \\ = \; & \frac{\lambda_i}{(\lambda_i - \ln\,\alpha)^2} r(i) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\,\alpha} \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \min_{a\in\{0,\ldots,j\}} \{d(j,a) + u(j-a)\} \\ & - \left(\frac{\lambda_i}{(\lambda_i - \ln\,\alpha)^2} r(i) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\,\alpha} \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \min_{a\in\{0,\ldots,j\}} \{d(j,a) + v(j-a)\} \right) \\ = \; & \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\,\alpha} \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \min_{a\in\{0,\ldots,j\}} \{d(j,a) + u(j-a)\} - (d(j,a_0) + v(j-a_0)) \\ \le \; & \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\,\alpha} \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \left(d(j,a_0) + u(j-a_0) - (d(j,a_0) + v(j-a_0))\right) \\ = \; & \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\,\alpha} \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \left(u(j-a_0) - v(j-a_0)\right) \le \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\,\alpha} ||u - v||. \end{aligned}$$

Nach dem Vertauschen der Rollen von u und v erhält man $||T_\alpha u - T_\alpha v|| \le \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\alpha} ||u-v||$. Da α ein Element des offenen Einheitsintervalls ist, trifft dieses ebenfalls auf den Faktor $\frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\,\alpha}$ zu, so daß die Kontraktion nachgewiesen ist. ■

Lemma 43 *Nun werde wieder $T_\alpha : \mathcal{F}(I) \to \mathcal{F}(I)$ betrachtet, und es sei $u \in \mathcal{F}(I)$. Dann gilt:*
(a) Aus $u \ge T_\alpha u$ und ($u \in \mathcal{U}(I)$ oder $u \ge 0$) folgt $u \ge V_\alpha$,
(b) Aus $u \le T_\alpha u$ und $u \in \mathcal{U}(I)$ folgt $u \le V_\alpha$.

Beweis: Es sei $\alpha \in (0,1)$ fest gewählt. δ_u sei die Strategie, bei der $\delta_u(j)$ das $a \in \{0, 1, ..., j\}$ wählt, das die Funktion $d(j,a) + u(j-a)$ minimiert.

(a): Durch eine analoge vollständige Induktion – wie im Beweis von Lemma 6 – läßt sich die folgende Ungleichung für alle $n \in I\!N$ und $i \in I$ zeigen:

$$\begin{aligned}
u(i) &\geq E_{\delta_u}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{T_{k+1}} c_{\delta_u}(k) + \alpha^{T_{k+1}} u(X_n) \,\middle|\, X_0 = i\right) \\
&= E_{\delta_u}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{T_{k+1}} c_{\delta_u}(k) \,\middle|\, X_0 = i\right) + E_{\delta_u}\left(\alpha^{T_{n+1}} u(X_n) \,\middle|\, X_0 = i\right) \\
&= E_{\delta_u}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{T_{k+1}} c_{\delta_u}(k) \,\middle|\, X_0 = i\right) + E_{\delta_u}\left(\left(\prod_{k=0}^{n} \frac{\lambda_{X_k}}{\lambda_{X_k} - \ln\alpha}\right) u(X_n) \,\middle|\, X_0 = i\right) \\
\overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} u(i) &\geq V_{\delta_u,\alpha}(i) + \lim_{n\to\infty} E_{\delta_u}\left(\left(\prod_{k=0}^{n} \frac{\lambda_{X_k}}{\lambda_{X_k} - \ln\alpha}\right) u(X_n) \,\middle|\, X_0 = i\right) \quad \forall i \in I \\
\Rightarrow u(i) &\geq V_{\delta_u,\alpha}(i) \geq V_\alpha(i) \quad \forall i \in I.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(b)\; E_\delta\left(\alpha^{T_{n+1}} u(X_{n+1}) \,\middle|\, X_n, ..., X_0\right) &= E_\delta\left(\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_{X_k}}{\lambda_{X_k} - \ln\alpha}\right) u(X_{n+1}) \,\middle|\, X_n, ..., X_0\right) \\
&= \left(\prod_{k=0}^{n} \frac{\lambda_{X_k}}{\lambda_{X_k} - \ln\alpha}\right) \sum_{j=X_n}^{N} p_{X_n,j} \sum_{a=0}^{j} q_j^\delta(a) u(j-a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \quad E_\delta\left(\alpha^{T_n} c_\delta(n) \,\middle|\, X_n, ..., X_0\right) &+ \left(\prod_{k=0}^{n} \frac{\lambda_{X_k}}{\lambda_{X_k} - \ln\alpha}\right) \sum_{j=X_n}^{N} p_{X_n,j} \sum_{a=0}^{j} q_j^\delta(a) u(j-a) \\
&- E_\delta\left(\alpha^{T_n} c_\delta(n) \,\middle|\, X_n, ..., X_0\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_{X_k}}{\lambda_{X_k} - \ln\alpha}\right) \cdot &\left(\frac{\lambda_{X_n}}{(\lambda_{X_n} - \ln\alpha)^2} r(X_n) + \frac{\lambda_{X_n}}{\lambda_{X_n} - \ln\alpha}\right. \\
&\left.\cdot \sum_{j=X_n}^{N} p_{X_n,j} \sum_{a=0}^{j} q_j^\delta(a) \left(d(j,a) + u(j-a)\right) - E\left(c_\delta(n) | X_n, ..., X_0\right)\right) \\
\geq \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_{X_k}}{\lambda_{X_k} - \ln\alpha}\right) \cdot &\left(\frac{\lambda_{X_n}}{(\lambda_{X_n} - \ln\alpha)^2} r(X_n) + \frac{\lambda_{X_n}}{\lambda_{X_n} - \ln\alpha} \sum_{j=X_n}^{N} p_{X_n,j}\right. \\
&\left.\cdot \min_{a\in\{0,...,j\}} \{d(j,a) + u(j-a)\} - E\left(c_\delta(n) | X_n, ..., X_0\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= &\quad \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_{X_k}}{\lambda_{X_k} - \ln\alpha}\right) \left(T_\alpha u(X_n) - E(c_\delta(n) | X_n, ..., X_0\right) \\
\geq &\quad \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_{X_k}}{\lambda_{X_k} - \ln\alpha}\right) \left(u(X_n) - E\left(c_\delta(n) | X_n, ..., X_0\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow E_\delta\left(\alpha^{T_n} c_\delta(n) \,\middle|\, X_n, ..., X_0\right) &\geq -E_\delta\left(\alpha^{T_{n+1}} u(X_{n+1} \,\middle|\, X_n, ..., X_0\right) \\
&\quad + E_\delta\left(\alpha^{T_n} u(X_n) \,\middle|\, X_{n-1}, ..., X_0\right) \quad \forall n \in I\!N
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow E_\delta\left(\alpha^{T_t} c_\delta(t)\Big| X_0 = i\right) &\geq -E_\delta\left(\alpha^{T_{t+1}} u(X_{t+1})\Big| X_0 = i\right) \\
&\quad + E_\delta\left(\alpha^{T_t} u(X_t)\Big| X_0 = i\right) \quad \forall t \in I\!N \\
\stackrel{\sum_{t=0}^{n-1}}{\Longrightarrow} E_\delta\left(\sum_{t=0}^{n-1} \alpha^{T_t} c_\delta(t)\Bigg| X_0 = i\right) &\geq u(i) - E_\delta\left(\left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_{X_k}}{\lambda_{X_k} - \ln\alpha}\right) u(X_n)\Bigg| X_0 = i\right)
\end{aligned}$$

$\stackrel{n\to\infty}{\Longrightarrow} V_{\delta,\alpha}(i) \geq u(i)$. ■

Satz 52 *Wenn neben der Bedingung A auch die Bedingung B gilt, dann ist V_α die eindeutige Lösung der Optimalitätsgleichung in $\mathcal{F}(I)$.*

Beweis: Auch hier folgt dieser Satz bei beschränkten Kostenfunktionen direkt aus der Kontraktion des Operators T_α. Sind die Kostenfunktionen nicht beschränkt, gilt aber zusätzlich die Bedingung B, ergeben das Lemma 38 und beide Teile von Lemma 43 direkt die gewünschte Aussage. ■

Der folgende Satz zeigt, daß unter der zusätzlichen Bedingung B die optimale Strategie durch die folgende **Politik-Iteration** ermittelt werden kann:

Man nehme für δ_0 eine beliebige stationäre Strategie. Man wähle induktiv δ^n, so daß gilt:

$$d(j, \delta^n(j)) + V_{\delta^{n-1},\alpha}(j - \delta^n(j)) = \min_{a\in\{0,\ldots,j\}} \{d(j,a) + V_{\delta^{n-1},\alpha}(j-a)\}.$$

Satz 53 *Unter der Bedingung (B) gilt $\lim_{n\to\infty} V_{\delta_n,\alpha}(i) = V_\alpha$, die Folge $(\delta_n)_{n=1}^\infty$ konvergiert somit gegen die $\alpha-$optimale Strategie.*

Beweis:

$$\begin{aligned}
V_{\delta_n,\alpha}(i) &= \frac{\lambda_i}{(\lambda_i - \ln\alpha)^2} r(i) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\alpha} \sum_{j=i}^N p_{ij} \min_{a\in\{0,\ldots,j\}} \Big\{d(j,a) + V_{\delta_{n-1},\alpha}(j-a)\Big\} \\
&\leq \frac{\lambda_i}{(\lambda_i - \ln\alpha)^2} r(i) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\alpha} \sum_{j=i}^N p_{ij} d(j, \delta_{n-1}(j)) + V_{\delta_{n-1},\alpha}(j - \delta_{n-1}(j)) \\
&= V_{\delta_{n-1},\alpha}(i).
\end{aligned}$$

Mit derselben Begründung wie im Beweis von Lemma 5 folgt aus der Ungleichung die Aussage des Satzes. ■

Unter der zusätzlichen Bedingung B, wie auch unter der Kenntnis der Funktion V_α, kann die optimale deterministische Strategie δ^* folgendermaßen konstruiert werden:

Wähle für $\delta^*(j)$ die Aktion a, die den Ausdruck $d(j,a) + V_\alpha(j-a)$ minimiert. Da die Funktion V_α i.a. nicht bekannt ist, wird der folgende Satz zur Berechung angegeben:

Satz 54 *Unter der Bedingung (B) gilt* $\lim_{n\to\infty} V_{\delta_n,\alpha}(i) = V_\alpha$*, die Folge* $(\delta_n)_{n=1}^\infty$ *konvergiert somit gegen die* $\alpha-$*optimale Strategie.*

Auch hier beginnt der **Beweis** mit einem Induktionsbeweis der Identität
$T_\alpha^{(n)}(0) = V_{\delta_\alpha,\alpha}^{(n)}$: $\quad n = 1$:

$$\left(T_\alpha^{(1)}(0)\right)(i) = \frac{\lambda_i}{(\lambda_i - \ln\alpha)^2} r(i) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\alpha} \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \min_{\{0\le a\le j\}} \{d(j,a) + 0\} = V_{\delta_\alpha,\alpha}^{(1)}(i)$$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
\left(T_\alpha^{(n)}(0)\right)(i) &= \frac{\lambda_i}{(\lambda_i - \ln\alpha)^2} r(i) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\alpha} \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \min_{\{0\le a\le j\}} \left\{d(j,a) + T_\alpha^{(n-1)}(j-a)\right\} \\
&= \frac{\lambda_i}{(\lambda_i - \ln\alpha)^2} r(i) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\alpha} \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \min_{\{0\le a\le j\}} \left\{d(j,a) + V_{\delta_\alpha,\alpha}^{(n-1)}\right\} \\
&= V_{\delta_\alpha,\alpha}^{(n)}(i).
\end{aligned}$$

Schließlich gilt

$$\begin{aligned}
V_\alpha(i) &= \lim_{n\to\infty} V_{\delta_\alpha,\alpha}^{(n)}(i) + \lim_{n\to\infty} E_{\delta_\alpha}\left(\left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_{X_k}}{\lambda_{X_k} - \ln\alpha}\right) V_\alpha(X_n) \middle| X_0 = i\right) \\
&\overset{\text{Lemma 38}}{=} \lim_{n\to\infty} V_{\delta_\alpha,\alpha}(i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(T_\alpha^{(n)}(0)\right)(i) \quad \forall i \in I. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Ebenfalls übertragen lassen sich die folgenden Ergebnisse, bei denen wieder die diskontierten Kosten untersucht werden, und zwar im Falle des Beginns mit einer Inspektion und eventuell anschließenden Reparatur. Diese Kostenfunktion unter der Strategie δ und dem Diskontierungsfaktor α wird auch hier mit $W_{\delta,\alpha}$ bezeichnet.

Somit ist $W_{\delta,\alpha}(i) = E\left(d(i,\delta(i)) + V_{\delta,\alpha}(i-\delta(i))\right) \quad \forall i \in I$.

Die Funktion $W_\alpha := \inf_{\{\delta\in\Pi_1\}} W_{\delta,\alpha}$ erfüllt hier die folgende Identität:

Satz 55

$$W_\alpha(i) = \min_{a\in\{0,\dots,i\}} \left\{d(i,a) + \frac{\lambda_{i-a}}{(\lambda_{i-a} - \ln\,\alpha)^2} r(i-a) + \sum_{j=i-a}^{N} p_{i-a,j} \frac{\lambda_{i-a}}{\lambda_{i-a} - \ln\,\alpha} W_\alpha(j)\right\}.$$

Beweis:

$$W_\alpha(i) = \min_{a\in\{0,\dots,i\}} \left\{d(i,a) + \int_0^\infty \alpha^x \left(x \cdot r(i-a) + \sum_{j=i-a}^{N} p_{i-a,j} W_\alpha(j)\right) \lambda_{i-a} e^{-\lambda_{i-a}}\, dx\right\}.$$

Nun ist der rechte Summand des Minimums gerade $V_\alpha(i-a)$ und daher betragsmäßig durch $\frac{|r(i-a)|\lambda_{i-a}}{(\lambda_{i-a}-\ln\alpha)^2} + \tilde{B}_{i-a}^\alpha$ beschränkt. Somit ist die Vertauschung von Summation und Integration möglich, und es ist $W_\alpha(i)$ gleich

$$\min_{a\in\{0,\dots,i\}} \left\{d(i,a) + \int_0^\infty \alpha^x x r(i-a) \lambda_{i-a} e^{-\lambda_{i-a}}\, dx + \sum_{j=i-a}^{N} p_{i-a,j} \int_0^\infty \alpha^x W_\alpha(j) \lambda_{i-a} e^{-\lambda_{i-a}}\, dx\right\}$$

$$= \min_{a\in\{0,\ldots,i\}} \left\{ d(i,a) + \frac{\lambda_{i-a}}{(\lambda_{i-a} - \ln\,\alpha)^2} r(i-a) + \sum_{j=i-a}^{N} p_{i-a,j} \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\,\alpha} W_\alpha(j) \right\}.$$

Daraus ergibt sich das folgende

Korollar 15 *Zwischen den Funktionen V_α und W_α gelten die folgenden Beziehungen:*

$$\begin{aligned} W_\alpha(i) &= \min_{a\in\{0,\ldots,i\}} \{d(i,a) + V_\alpha(i-a)\}, \\ V_\alpha(i) &= \frac{\lambda_i}{(\lambda_i - \ln\,\alpha)^2} r(i) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\,\alpha} \sum_{j=i}^{N} p_{ij} W_\alpha(j). \end{aligned}$$

W_α kann auch hier mit Hilfe des Operators V_α bestimmt werden, und für den Operator $\tilde{T}$, bei dessen Definition des 2. Kapitels lediglich α weggelassen wird, gilt ebenfalls das Lemma 2.

Als nächstes werden die folgenden analytischen Aussagen gezeigt:

Lemma 44

1. *Ist die Folge $(\lambda_i)_{i\in I}$ monoton wachsend, dann auch die Folge $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\,\alpha}\right)_{i\in I}$.*

2. *Ist die Folge $(\lambda_i)_{i\in I}$ außer monoton wachsend zusätzlich noch konkav, überträgt sich diese Eigenschaft auch auf die Folge $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\,\alpha}\right)_{i\in I}$.*

3. *Wenn der in $\overline{I\!R^+}$ existierende Grenzwert λ der monoton wachsenden Folge $(\lambda_i)_{i\in I}$ kleinergleich $-\ln\,\alpha$ ist, dann ist auch die Folge $\left(\frac{\lambda_i}{(\lambda_i - \ln\,\alpha)^2}\right)_{i\in I}$ monoton wachsend.*

4. *Ist die Folge $(\lambda_i)_{i\in I}$ monoton wachsend, die Folge $(\lambda_i r_i)_{i\in I}$ konkav, gilt $\lambda \leq -2\ln\,\alpha$ und $2r'f' \geq -f''r$, dann ist auch die Folge $\left(\frac{r_i\lambda_i}{(\lambda_i - \ln\,\alpha)^2}\right)_{i\in I}$ konkav für alle monoton wachsenden nicht-negativen Folgen $(r(i))_{i\in I}$.*

Beweis: Man betrachte die Menge der Stützpunkte $\{(i,\lambda_i)\}$. Wegen des Wachstums der (λ_i) gibt es auch ein nicht-negatives monoton wachsendes $f \in C^2[0,\infty)$ mit $f(i) = \lambda_i$. Da α einen Wert aus dem Einheitsintervall annimmt, ist $\ln\,\alpha$ stets negativ.

Nun sei $g(x) := \dfrac{f(x)}{f(x) - \ln\,\alpha}$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{f'(x)(f(x) - \ln\,\alpha) - f(x)f'(x)}{(f(x) - \ln\,\alpha)^2} = -\ln\,\alpha \frac{f'(x)}{(f(x) - \ln\,\alpha)^2} > 0.$$

Die Funktion g ist somit auch monoton wachsend und somit ebenfalls die Folge $(g(i))_{i\in I} = \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\,\alpha}\right)_{i\in I}$. Damit ist (1) gezeigt. Nun zu (2):

Für eine konkave monotone Folge von Stützpunkten läßt sich eine konkave monotone Funktion f finden, deren Graph durch die Stützpunkte verläuft.

$$g''(x) = -\ln\alpha \frac{\overbrace{f''(x)}^{<0}\overbrace{(f(x)-\ln\alpha)^2}^{>0} - 2\overbrace{f'(x)}^{>0}\overbrace{(f(x)-\ln\alpha)}^{>0}}{\underbrace{(f(x)-\ln\alpha)^4}_{>0}} < 0.$$

Die Funktion g und damit auch die Folge $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\alpha}\right)_{i\in N}$ ist demnach ebenfalls konkav.
(3) Da für alle $x \in I\!R^+$ ein $i \in I\!N$ existiert mit $x \in [i-1, i]$, gilt $f(x) \leq f(i) \leq -\ln\alpha$. Somit ist auch f durch $-\ln\alpha$ nach oben beschränkt, und es gilt für alle $x \in I\!R^+$:

$$\begin{aligned}
& f(x) \leq -\ln\alpha \Rightarrow \frac{f(x)-\ln\alpha}{f(x)} \geq 2 \quad \Rightarrow \frac{f(x)}{f(x)-\ln\alpha} \leq \frac{1}{2} \\
\Rightarrow\ & 1 - 2\frac{f(x)}{f(x)-\ln\alpha} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) - 2\frac{f'(x)f(x)}{f(x)-\ln\alpha} \geq 0 \\
\Rightarrow\ & \frac{f'(x)(f(x)-\ln\alpha)^2 - 2f(x)f'(x)(f(x)-\ln\alpha)}{(f(x)-\ln\alpha)^4} \geq 0 \\
\Rightarrow\ & \frac{\partial}{\partial x}\frac{f(x)}{(f(x)-\ln\alpha)^2} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda_i}{(\lambda_i-\ln\alpha)^2} \geq \frac{\lambda_{i-1}}{(\lambda_{i-1}-\ln\alpha)^2} \quad \forall i \in I\!N.
\end{aligned}$$

(4) Auf die gleiche Weise wie in (3) gilt:

$f \leq -2\ln\alpha$ und $\frac{r'}{r} \geq -\frac{1}{2}\frac{f''}{f'}$, und es folgt:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dx^2}\frac{f(x)\cdot r(x)}{(f(x)-\ln\alpha)^2} \\
= \ & \frac{\frac{d^2}{dx^2}(f(x)\cdot r(x))}{(f(x)-\ln\alpha)^2} - 2\frac{\frac{d(r(x)f(x))}{dx}2f'(x)(f(x)-\ln\alpha)}{(f(x)-\ln\alpha)^4} \\
& -\frac{r(x)f(x)\left(2f''(x)(f(x)-\ln\alpha)+2(f'(x))^2\right)}{(f(x)-\ln\alpha)^4} + 2\frac{f(x)r(x)\left(2f'(x)(f(x)-\ln\alpha)\right)^2}{(f(x)-\ln\alpha)^6} \\
= \ & \frac{\frac{d^2}{dx^2}(f(x)\cdot r(x))}{(f(x)-\ln\alpha)^2} - 4\frac{r'(x)f(x)f'(x)}{(f(x)-\ln\alpha)^3} - 4\frac{r(x)\left(f'(x)\right)^2}{(f(x)-\ln\alpha)^3} \\
& -2\frac{r(x)f(x)f''(x)}{(f(x)-\ln\alpha)^3} + 6\frac{r(x)f(x)\left(f'(x)\right)^2}{(f(x)-\ln\alpha)^4} \\
= \ & \frac{\frac{d^2}{dx^2}(f(x)\cdot r(x))}{(f(x)-\ln\alpha)^2} - \frac{2}{(f(x)-\ln\alpha)^4}\Big(2r'(x)f(x)f'(x)(f(x)-\ln\alpha) + 2r(x)\left(f'(x)\right)^2 f(x) \\
& -2\ln\alpha\, r(x)\left(f'(x)\right)^2 + r(x)f(x)f''(x)(f(x)-\ln\alpha) - 3r(x)f(x)\left(f'(x)\right)^2\Big) \\
= \ & \frac{\frac{d^2}{dx^2}(f(x)\cdot r(x))}{(f(x)-\ln\alpha)^2} - 2\frac{2}{(f(x)-\ln\alpha)^4} \\
& \Big(f(x)(f(x)-\ln\alpha)(2r'(x)f'(x)+r(x)f''(x)) + \left(f'(x)\right)^2 r(x)(-2\ln\alpha - f(x)\Big) \\
\leq \ & 0.
\end{aligned}$$

Somit ist die Folge $\left(\frac{\lambda_i}{(\lambda_i-\ln\alpha)^2}\right)_{i\in I}$ konkav, und alles ist gezeigt. ■

Um auch hier Näheres über die optimale Strategie sagen zu können, wird nun außer der schon übertragenen Voraussetzung (2) die Voraussetzung (3) aus Kapitel 2.1 übernommen und die Voraussetzung (1) wie folgt verändert:

(1) Die Funktion $\frac{\lambda_i r(i)}{(\lambda_i - \ln\alpha)^2}$ *ist monoton nicht-fallend in* i *auf* I.

Diese Voraussetzung ist nach dem letzten Lemma z. B. dann erfüllt, wenn r monoton nicht-fallend ist und $\lambda_i < -\ln\alpha \ \forall i \in I$ gilt. Nun sind für den folgenden Satz die notwendigen Bedingungen geschaffen:

Satz 56 V_α *und* V_α^b *sind für alle* $\alpha \in (0,1)$ *monoton nicht-fallend.*

Beweis: Der Beweis verläuft ähnlich wie der von Satz 9 durch Induktion mit der analogen Funktion $\psi(i, \alpha, N)$. Der Induktionsschluß sieht hier folgendermaßen aus:

$$\psi(i,\alpha,N+1) = \frac{\lambda_i}{(\lambda_i - \ln\,\alpha)^2} r(i) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\,\alpha} \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \min_{a\in\{0,\dots,j\}} \{d(j,a) + \psi(j-a,\alpha,N)\}\,.$$

Die Monotonie der unendlichen Summe wurde bereits in Satz 9 gezeigt, so daß auf Grund von Lemma 44 (1) mit der gleichen Schlußfolgerung wie am Ende des Beweises von Satz 9 alles bewiesen ist. Die Optimalitätsgleichung ergibt nun auf Grund der Voraussetzung (1) sowie dem ersten und dritten Teil des letzten Lemmas die Behauptung des Satzes. ■

Die bang-bang Strategien

Die Voraussetzungen (4) und (4a) aus dem ersten Kapitel werden hier zur Voraussetzung (4) folgendermaßen zusammengefaßt:
Die Funktion $d(i,i) - d(i,0)$ ist monoton nicht-wachsend in i, $i \in I$, **oder**
es existiert eine reelle Konstante ρ und eine natürliche Zahl i_0 mit der Eigenschaft $d(i,i) - d(i,0) = \rho(i-1) + d(1,1) - d(1,0) \ \forall i \in I\backslash\{0\}$ (Linearität von $d(i,i) - d(i,0)$ in $I\!N$). Zu diesem Zeitpunkt seien allerdings nur die Voraussetzungen (1), ..., (3) erfüllt. Dann gilt der folgende

Satz 57 (1) *In der Unterklasse der bang-bang Strategien gibt es eine optimale Strategie* δ_α^* *der folgenden Gestalt:*

$$\delta_\alpha^*(j) = \begin{cases} 0 & V_\alpha^b(i) - V_\alpha^b(0) \le d(i,i) - d(i,0), \\ j & V_\alpha^b(i) - V_\alpha^b(0) > d(i,i) - d(i,0). \end{cases}$$

Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die Funktion $d(i,i) - d(i,0)$ *in* i *monoton nicht-wachsend ist, sind die Strategien der folgenden Gestalt optimal in der Unterklasse der bang-bang Strategien:*

$$\delta_k^*(j) = \begin{cases} 0 & j < k, \\ j & j \ge k, \end{cases} \quad k \in \{j_\alpha^*, j_\alpha^* + 1, \dots, i_\alpha^*\}$$

mit $i^*_\alpha = \min A_\alpha,\ A_\alpha := \{j \in I :\ V^b_\alpha(j) - V^b_\alpha(0) > d(j,j) - d(j,0)\}$
und $j^*_\alpha = \min \tilde{A}_\alpha,\ \tilde{A}_\alpha := \{j \in I :\ V^b_\alpha(j) - V^b_\alpha(0) \geq d(j,j) - d(j,0)\}$
$(i^*_\alpha = \infty,$ *wenn* $A_\alpha = \emptyset$ *und* $j^*_\alpha = \infty,$ *wenn* $\tilde{A}_\alpha = \emptyset)$.

In den beiden folgenden Teilen dieses Satzes sei wieder die Voraussetzung erfüllt, daß die Funktion $d(i,i) - d(i,0)$ *monoton nicht-wachsend in* $i,\ i \in I$ *ist:*
(2) *Wenn eine bang-bang Strategie mit Schwellenwert* $k \notin \{j^*_\alpha, j^*_\alpha + 1, ..., i^*_\alpha\}$ *ebenfalls optimal ist, dann gilt* $p_{ij} = 0\ \forall (i,j) \in I \times M_k$ *mit* $M_k := \{k{+}1, ..., j^*_\alpha\} \cup \{i^*_\alpha{+}1, ..., k\}$.

Wegen $i^*_\alpha + 1 > j^*_\alpha$ *ist für jedes* $k \in I$ *auch hier eine dieser beiden Mengen leer.*

(3) *Wenn eine bang-bang Strategie* δ *optimal ist mit* $\delta(k) = 0$ *für* $k > i^*_\alpha$ *oder* $\delta(k) = k$ *für* $k < j^*_\alpha$*, dann erhalten wir* $p_{ik} = 0$ *für alle* $i \in I$.

Der **Beweis** ist identisch mit dem Beweis von Satz 10 mit der Wahl $\alpha = 1$, denn in diesem Modell ist maximale Reparatur genau dann mindestens so gut wie minimale Reparatur, wenn die Ungleichung

$$d(i,i) + V_\alpha(0) \quad \leq \quad d(i,0) + V_\alpha(i) \qquad \text{gilt.}$$

Durch Hinzunahme von Faktoren ändert sich wie folgt der

Satz 58 *Wenn* $d(i,i) - d(i,0)$ *monoton nicht-wachsend ist in* $i,\ i \in I$ *und für ein* $i_0 \in I$ *die folgende Bedingung gilt:*

$$\frac{\lambda_{i_0}}{-\ln\,\alpha}\,\frac{r(i_0)}{\lambda_{i_0} - \ln\,\alpha} - \frac{\lambda_0}{-\ln\,\alpha} + \frac{r(0)}{\lambda_0 - \ln\,\alpha}\sum_{j=0}^{N} p_{i_0 j}\left(\frac{\lambda_{i_0}}{-\ln\,\alpha} d(j, j - i_0) - \frac{\lambda_0}{-\ln\,\alpha} d(j,j)\right)$$

$< d(i_0, i_0) - d(i_0, 0)$, *dann gilt für das* i^*_α *aus dem letzten Satz:* $i^*_\alpha > i_0$.

Hier sehen die beiden Ungleichungen folgendermaßen aus:

$$V_\alpha(i) \leq \frac{\lambda_i}{(\lambda_i - \ln\,\alpha)^2} r(i) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\,\alpha}\sum_{j=0}^{N} p_{ij} d(j, j-i) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\,\alpha} V_\alpha(i),$$

$$V_\alpha(0) \geq \frac{\lambda_0}{(\lambda_0 - \ln\,\alpha)^2} r(0) + \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \ln\,\alpha}\sum_{j=0}^{N} p_{ij} d(j, 0) + \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \ln\,\alpha} V_\alpha(0).$$

Daraus ergibt sich das Ungleichungssystem:

$$V_\alpha(i) \leq \frac{\lambda_i}{-\ln\,\alpha}\,\frac{r(i)}{\lambda_i - \ln\,\alpha} + \frac{\lambda_i}{-\ln\,\alpha}\sum_{j=0}^{N} p_{ij} d(j, j-i),$$

$$V_\alpha(0) \geq \frac{\lambda_0}{-\ln\,\alpha}\,\frac{r(0)}{\lambda_0 - \ln\,\alpha} + \frac{\lambda_0}{-\ln\,\alpha}\sum_{j=0}^{N} p_{ij} d(j, j).$$

Beide Ungleichungen ergeben nun die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
V_\alpha(i) - V_\alpha(0) &\leq \frac{\lambda_i}{-\ln\,\alpha}\,\frac{r(i)}{\lambda_i - ln\,\alpha} - \frac{\lambda_0}{-\ln\,\alpha}\,\frac{r(0)}{\lambda_0 - \ln\,\alpha} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{N} p_{ij}\left(\frac{\lambda_i}{-\ln\,\alpha} d(j, j-i) - \frac{\lambda_0}{-\ln\,\alpha} d(j,0)\right) \\
\Rightarrow V_\alpha(i_0) - V_\alpha(0) &\leq d(i_0, i) - d(i_0, 0) \\
\Rightarrow i_0 \notin A_\alpha &\Rightarrow \{0, 1, ..., i_0\} \cap A_\alpha = \emptyset \text{ wegen der Bedingung des Satzes} \\
&\Rightarrow i^*_\alpha > i_0. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Aus dem letzten Beweis ergibt sich unmittelbar das folgende

Korollar 16 *Für $V_\alpha(0)$ gilt die folgende Abschätzung:*

$$\frac{\lambda_0}{-\ln\,\alpha}\frac{r(0)}{\lambda_0 - \ln\,\alpha} + \frac{\lambda_0}{-\ln\,\alpha}\sum_{j=0}^{N} p_{0j} d(j,0) \leq V_\alpha(0) \leq \frac{\lambda_0}{-\ln\,\alpha}\frac{r(0)}{\lambda_0 - \ln\,\alpha} + \frac{\lambda_0}{-\ln\,\alpha}\sum_{j=0}^{N} p_{0j} d(j,j).$$

Dieses Korollar gibt Auskunft über die Beschränktheit der Funktion $\alpha \to (-\ln\alpha)V_\alpha(0)$ auf $(0,1)$, die bei der Berechnung der Durchschnittskosten in nächsten Abschnitt verwendet wird:
Wegen $\lim_{\alpha\to 1}(\lambda_0 - \ln\alpha) = \lambda_0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\limsup_{\alpha\to 1}(-\ln\alpha)V_\alpha(0) &\leq \lambda_0 r(0) + \lambda_0 \sum_{j=0}^{N} p_{0j} d(j,j) \\
\text{und } \liminf_{\alpha\to 1}(-\ln\alpha)V_\alpha(0) &\geq \lambda_0 r(0) + \lambda_0 \sum_{j=0}^{N} p_{0j} d(j,0).
\end{aligned}$$

Satz 59 *δ sei eine bang-bang Strategie mit Schwellenwert i^*_α. Man betrachte die $i^*_\alpha-$quadratische Matrix $A = (a_{ij})_{0\leq i,j\leq i^*_\alpha}$ und den Vektor $b = (b_i)_{0\leq i<i^*_\alpha} \in I\!R^{i^*_\alpha}$ mit*

$$a_{00} := 1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \ln\alpha}\left(\sum_{j=i^*_\alpha}^{N} p_{0j} + p_{00}\right), \quad a_{0j} := \frac{\lambda_0}{\ln\alpha - \lambda_0} p_{0j}\ \forall j > 0,$$

$$a_{i0} := \frac{\lambda_i}{\ln\alpha - \lambda_i}\sum_{j=i^*_\alpha}^{N} p_{ij}, \quad a_{i1} := ... := a_{i,i-1} = 0, \quad a_{i,i} := \left(1 - \frac{\lambda_i p_{ii}}{\lambda_i - \ln\alpha}\right)\ \forall i > 0,$$

$$a_{ij} := \frac{\lambda_i p_{ij}}{\ln\alpha - \lambda_i}\ \forall j > i \text{ und } b_i := \frac{\lambda_i r(i)}{(\lambda_i - \ln\alpha)^2} + \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\alpha}\left(\sum_{j=i}^{i^*_\alpha - 1} p_{ij} d(j,0) + \sum_{j=i^*_\alpha}^{N} p_{ij} d(j,j)\right).$$

Wenn die Matrix A, die abgesehen von der ersten Spalte eine obere Dreiecksmatrix ist, regulär ist, dann kann die Wertfunktion $V_{\delta,\alpha}$ wie folgt bestimmt werden:

$$(V_{\delta,\alpha}(0), ..., V_{\delta,\alpha}(i^*_\alpha - 1))^t = A^{-1}\cdot b.$$

$$V_{\delta,\alpha}(i) = \frac{\lambda_i r(i)}{(\lambda_i - \ln\alpha)^2} + \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\alpha}\left(V_{\delta,\alpha}(0) + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} d(j,j)\right) \quad \forall i \geq i^*_\alpha.$$

Beweis: Der zweite Teil des Satzes ergibt sich direkt aus der Optimalitätsgleichung mit Startzustand $X_0 = i \geq i^*_\alpha$. Ist $i < i^*_\alpha$, dann gilt:

$$V_{\delta,\alpha}(i) = \frac{\lambda_i}{(\lambda_i - \ln\alpha)^2} r(i)$$
$$+\frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\alpha}\left(\sum_{j=i}^{i^*_\alpha - 1} p_{ij}(d(j,0) + V_{\delta,\alpha}(j)) + V_{\delta,\alpha}(0)\sum_{j=i^*_\alpha}^{N} p_{ij} + \sum_{j=i^*_\alpha}^{N} p_{ij} d(j,j)\right).$$

Nun wähle $i := 0$:

$$V_{\delta,\alpha}(0)\left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \ln\alpha}\left(\sum_{j=i^*_\alpha}^{N} p_{0j} + p_{00}\right)\right) - \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \ln\alpha}\sum_{j=1}^{i^*_\alpha - 1} p_{0j} V_{\delta,\alpha}(j)$$
$$= \frac{\lambda_0 r(0)}{(\lambda_0 - \ln\alpha)^2} + \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \ln\alpha}\left(\sum_{j=0}^{i^*_\alpha - 1} p_{0j} d(j,0) + \sum_{j=i^*_\alpha}^{N} p_{0j} d(j,j)\right).$$

Für $i > 0$ gilt :

$$V_{\delta,\alpha}(0)\left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\alpha}\sum_{j=i^*_\alpha}^{N} p_{ij}\right) + \left(1 - \frac{\lambda_i p_{ii}}{\lambda_i - \ln\alpha}\right) V_{\delta,\alpha}(i) - \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\alpha}\sum_{j=i+1}^{i^*_\alpha - 1} p_{ij} V_{\delta,\alpha}(j)$$
$$= \frac{\lambda_i r(i)}{(\lambda_i - \ln\alpha)^2} + \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\alpha}\sum_{j=i}^{i^*_\alpha - 1} p_{ij} d(j,0) + \sum_{j=i^*_\alpha}^{N} p_{ij} d(j,j).$$

Diese Gleichungen erfüllen das LGS $A \cdot (V_{\delta,\alpha}(0), ..., V_{\delta,\alpha}(i^*_\alpha - 1))^t = b.$ ∎

Für die weitere Behandlung dieses Systems seien zusätzlich die folgenden Bedingungen erfüllt:

(5) $\frac{\lambda_i r(i)}{(\lambda_i - \ln\alpha)^2}$ *ist konkav in* i *auf* I.
(6) $\frac{\lambda_i \sum_{j=k}^{N} p_{ij}}{\lambda_i - \ln\alpha}$ *ist konkav in* i *auf* I *für alle* $k \in I$.
(7) r *und* d *sind nicht-negativ.*

Nach Lemma 44 (4) ist Bedingung (5) u. a. dann erfüllt, wenn die Folge $(\lambda_i)_{i\in I}$ monoton nicht-fallend, die Folge $(r_i\lambda_i)$ konkav ist, $\lambda \leq -2\ln\alpha$ gilt und es eine differenzierbare Funktion f durch die Punkte (i, λ_i) gibt, die die Ungleichung $\frac{r'}{r} \leq -\frac{1}{2}\frac{f''}{f}$ erfüllt. Die Bedingung (6) ist nach Lemma 44 (2) zum Beispiel dann erfüllt, wenn die Folge $(\lambda_i)_{i\in I}$ konkav ist und die Wahrscheinlichkeiten so gewählt sind, daß die gegen 1 konvergierende Folge $(\sum_{j=k}^{N} p_{ij})_{i\in I}$ diese Konkavität als Faktor nicht mehr stört. In den im letzten Abschnitt dieses Kapitels angeführten Beispielen werden die Voraussetzungen allerdings immer direkt überprüft.

Lemma 45
Die Bedingung (6) ist äquivalent dazu, daß die Funktion $\frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\alpha}\sum_{j=i}^{N} p_{ij} f(j)$ *in* i *für alle monoton fallenden und nicht-negativen Funktionen* f *auf* I *konkav ist.*

Beweis: Daß Voraussetzung (6) unter der Voraussetzung dieses Lemmas erfüllt ist, ergibt sich auch hier aus der speziellen Wahl $f_k(j) := 1_{\{j\geq k\}},\ k,j \in I$. Um die andere Richtung dieses Lemmas zu beweisen, seien
$f_0 := 0$; (f_0 wird nur wegen des Beweis des folgenden Korollars eingeführt.)
$\mu_i := \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\alpha}$;
$\tilde f := f + f_0 \geq 0$; $c_0 := \tilde f(0),\ c_k := \tilde f(k) - \tilde f(k-1)\,\forall k \in I\!N$. Nun gilt:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{N} (\mu_{i+1}p_{i+1,j} - \mu_i p_{ij})\left(\tilde f(j) - f_0\right)\\
=\;& \sum_{j=0}^{N} \mu_{i+1}p_{i+1,j}\sum_{k=0}^{N} c_k f_k(j) - \sum_{j=0}^{N}\mu_i p_{ij}\sum_{k=0}^{N} c_k f_k(j) + f_0(\mu_i - \mu_{i+1})\\
=\;& \sum_{k=0}^{N} c_k \sum_{j=k}^{N}\mu_{i+1}p_{i+1,j} - \sum_{k=0}^{N} c_k\sum_{j=k}^{N}\mu_i p_{ij} + f_0(\mu_i - \mu_{i+1})\\
=\;& \sum_{k=0}^{N} c_k\left(\sum_{j=k}^{N}\mu_{i+1}p_{i+1,j} - \sum_{j=k}^{N}\mu_i p_{ij}\right) + f_0(\mu_i - \mu_{i+1}).
\end{aligned}$$

Auf Grund der Nicht-Negativität der Folge $(c_k)_{k\in I}$ und der Konkavität der Funktion $\mu_i\sum_{j=k}^{N} p_{ij}$ in i für alle k nach Bedingung (6) ist der erste Summand monoton nicht-wachsend in i. Da f_0 verschwindet und die Folge $(\lambda_i)_{i\in I}$ und damit auch die Folge $(\mu_i)_{i\in I}$ konstant sind, verschwindet auch der zweite Summand, und alles ist gezeigt. ∎

Korollar 17 *Wenn die Folge $(\lambda_i)_{i\in I}$ konstant ist, dann ist die Bedingung (6) äquivalent dazu, daß die Funktion $\frac{\lambda_i}{\lambda_i-\ln\alpha}\sum_{j=i}^{N} p_{ij}f(j)$ in i konkav ist für alle monoton fallenden Funktionen f auf I.*

Beweis: Bei dem Beweis des letztes Lemmas ist lediglich f_0 folgendermaßen zu definieren:
$$f_0 := \begin{cases} -f(0) & \text{falls } f(0) < 0,\\ 0 & \text{sonst;}\end{cases}$$
In der letzten Zeile verschwindet hier der zweite Summand, wegen $\mu_i - \mu_{i+1} = 0$.

Satz 60 *Unter den Voraussetzungen $(0),\ldots,(7)$ sind V_α und V_α^b für alle $\alpha\in(0,1)$ konkav.*

Beweis: Die Terme $\min\limits_{a\in\{0,\ldots,j\}}\{d(j,a)+V_\alpha(j-a)\}$ und $\min\limits_{a\in\{0,j\}}\{d(j,a)+V_\alpha(j-a)\}$ sind nach dem Beweis von Satz 14 monoton nicht-fallend. Die Voraussetzungen (5), (6) und (7) und das letzte Lemma 45 sorgen für die Richtigkeit dieses Satzes. ∎

Die Schlußerklärung von Kapitel 2.1 ergibt auch hier den zentralen

Satz 61 *Es seien die Bedingungen $(1),\ldots,(3)$ und $(5),\ldots,(7)$ erfüllt.*
(1) *Die optimale Strategie sieht im allgemeinen folgendermaßen aus:*

$$\delta_\alpha^*(j) = \begin{cases} 0 & V_\alpha(i) - V_\alpha(0) \leq d(i,i) - d(i,0), \\ j & V_\alpha(i) - V_\alpha(0) > d(i,i) - d(i,0). \end{cases}$$

Wenn zusätzlich noch die Bedingung (4) erfüllt ist, dann sind die Strategien der folgenden Gestalt optimal:

$$\delta_k^*(j) = \begin{cases} 0 & j < k, \\ j & j \geq k, \end{cases} \quad k \in \{j_\alpha^*,\, j_\alpha^* + 1, ..., i_\alpha^*\}$$

mit $i_\alpha^* = \min A_\alpha,\ A_\alpha := \{j \in I : V_\alpha(j) - V_\alpha(0) > d(j,j) - d(j,0)\}$
und $j_\alpha^* = \min \tilde{A}_\alpha,\ \tilde{A}_\alpha := \{j \in I : V_\alpha(j) - V_\alpha(0) \geq d(j,j) - d(j,0)\}$
($i_\alpha^* = \infty$ *wenn* $A_\alpha = \emptyset$ *und* $j_\alpha^* = \infty$ *wenn* $\tilde{A}_\alpha = \emptyset$).

(2) *Wenn unter der zusätzlichen Bedingung* (4) *oder* (4a) *eine bang-bang Strategie mit Schwellenwert* $k \notin \{j_\alpha^*,\, j_\alpha^* + 1, ..., i_\alpha^*\}$ *ebenfalls optimal ist, dann gilt:*

$$p_{ij} = 0\ \forall (i,j) \in I \times M_k \text{ mit } M_k := \{k+1, ..., j_\alpha^*\} \cup \{i_\alpha^* + 1, ..., k\}.$$

Es sei daran erinnert, daß für jedes $k \in I$ *eine dieser beiden Mengen leer ist.*

(3) *Wenn ebenfalls unter der zusätzlichen Bedingung* (4) *oder* (4a) *eine bang-bang Strategie* δ *mit* $\delta(k) = 0$ *für* $k > i_\alpha^*$ *oder* $\delta(k) = k$ *für* $k < j_\alpha^*$ *optimal ist, dann gilt* $p_{ik} = 0$ *für alle* $i \in I$.

Wie im Beweis von Satz 15 gilt:

$$\begin{aligned} V_\alpha(i) - V_\alpha(0) &\geq \frac{\lambda_i}{(\lambda_i - \ln\,\alpha)^2} r(i) - \frac{\lambda_0}{(\lambda_0 - \ln\,\alpha)^2} r(0) \\ &> \rho(i-1) + d(1,1) - d(1,0) = d(i,i) - d(i,0) \quad \forall i \geq i_0. \end{aligned}$$

Vom ersten Modell unverändert übernommen werden kann der dieses Kapitel abschließende

Satz 62 *Auch ohne, daß die Bedingung B erfüllt ist, gilt das Folgende:*
Wenn bekannt ist, daß eine bang-bang Strategie mit Schwellenwert optimal ist und V_{δ_j} *für ein* $j \in I$ *eine Lösung der Optimalitätsgleichung ist, dann ist* δ_j *optimal.*

Beim **Beweis** dieses Satzes wird die erste Gleichung des Satzes 16 folgendermaßen verändert:

$$\begin{aligned} V_{\delta_k}(i) &= \frac{\lambda_i}{(\lambda_i - \ln\alpha)^2} r(i) + \frac{\lambda_i}{(\lambda_i - \ln\alpha)^2} \sum_{j=i}^{N} p_{ij} d(j,j) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\alpha} V_{\delta_k}(0). \\ \Rightarrow V_{\delta_{i^*}}(i) - V_{\delta_j}(i) &= \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \ln\alpha} \Big(V_{\delta_{i^*}}(0) - V_{\delta_j}(0) \Big)\ \forall i > \max\{i^*, j\} \\ \Rightarrow ||V_{\delta_{i^*}} - V_{\delta_j}||_\infty &\leq |V_{\delta_{i^*}}(0) - V_{\delta_j}(0)| + \max\Big\{ |V_{\delta_{i^*}}(\max\{i^*, j\})|, \Big| V_{\delta_j}(\max\{i^*, j\}) \Big| \Big\} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Der Rest des Beweises bleibt weitgehend unverändert, mit dem einzigen Unterschied, daß hier statt der Kontraktionskonstanten $\alpha \in (0,1)$ die Kontraktionskonstante $\frac{\alpha}{\alpha - \ln \alpha} \in (0,1)$ gewählt werden muß. ■

5.2 Das Durchschnittskostenkriterium

In diesem Modell werden die Durchschnittskosten auf den praktisch relevanten Fall der beschränkten Kostenfunktionen eingeschränkt. Somit seien wieder sowohl die Reparaturkosten als auch die Betriebskosten durch die reelle Konstante C beschränkt. Die Wertfunktion für die Durchschnittskosten ist hier für alle $i \in I$ die folgende:

$$\begin{aligned}
\phi_\delta(i) &= \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} E_\delta(\text{Kosten in } (0,t]) = \limsup_{m\to\infty} \frac{E_\delta(\text{Kosten in } [0,T_m] | X_0 = i)}{E_\delta(T_m | X_0 = i)} \\
&= \limsup_{m\to\infty} \frac{E_\delta\Big(\sum_{n=0}^{m-1}\Big(\tau_{n+1} r(X_n) + \sum_{j=0}^{N} P(X_{n+1}^- = j | X_n) d(j, \delta(j))\Big)\Big| X_0 = i\Big)}{E_\delta(T_m | X_0 = i)} \\
\Rightarrow |\phi_\delta(i)| &\le \limsup_{m\to\infty} \frac{C \cdot E_\delta(T_m | X_0 = i) + C \cdot m}{E_\delta(T_m | X_0 = i)} \le (1+c) \cdot C.
\end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung folgt aus $E_\delta(T_m | X_0 = i) \ge \frac{m}{c}$. Ähnlich wie im zweiten Kapitel lassen sich die folgenden drei Sätze beweisen:

Satz 63 (1) *Wenn es eine beschränkte Funktion h auf dem Zustandsraum I und eine Konstante $g \in I\!R$ gibt, so daß gilt:*

$$h(i) = \frac{r(i) - g}{\lambda_i} + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \min_{a \in \{0,\ldots,j\}} \{d(j,a) + h(j-a)\} \quad \forall i \in I,$$

dann existiert eine stationäre Strategie δ^*, für die gilt:
$g = \phi(i) := \phi_{\delta^*}(i) = \inf_{\{\delta \in \Pi_1\}} \phi_\delta(i) \quad \forall i \in I.$
(2) *Wenn es eine beschränkte Funktion h auf dem Zustandsraum I und eine Konstante $g \in I\!R$ gibt, so daß für die stationäre Politik δ gilt:*

$$h(i) = \frac{r(i) - g}{\lambda_i} + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \{d(j, \delta(j)) + h(j - \delta(j))\} \quad \forall i \in I,$$

dann gilt $\quad g = \phi_\delta(i) \quad \forall i \in I.$
(3) *Wenn es eine beschränkte Funktion h auf dem Zustandsraum I und eine Konstante $g \in I\!R$ gibt, so daß gilt:*

$$h(i) = \frac{r(i) - g}{\lambda_i} + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \min_{a \in \{0,j\}} \{d(j,a) + h(j-a)\} \quad \forall i \in I,$$

dann existiert eine stationäre bang-bang Strategie δ^*, für die gilt:
$g = \phi^b(i) := \phi_{\delta^*}(i) = \inf_{\delta \in \Pi^b} \phi_\delta(i) \quad \forall i \in I.$

Beweis: (1) $E_\delta(h(X_i)|X_{i-1}) = \sum_{j=0}^{N} P(X_i^- = j|X_{i-1}) \cdot h(j-\delta(j))$

$$\geq \frac{r(X_{i-1})-g}{\lambda_{X_{i-1}}} + \sum_{j=0}^{N} P(X_i^- = j|X_{i-1}) \min_{a\in\{0,\ldots,j\}}\{d(j,a)+h(j-a)\} - \frac{r(X_{i-1})-g}{\lambda_{X_{i-1}}}$$

$$-\sum_{j=0}^{N} P(X_i^- = j|X_{i-1}) d(j,\delta(j))$$

$$= h(X_{i-1}) + \frac{g-r(X_{i-1})}{\lambda_{X_{i-1}}} - \sum_{j=0}^{N} P(X_i^- = j|X_{i-1}) d(j,\delta(j)).$$

Wegen des Verschwindens der Summe $E_\delta\left(\sum_{i=1}^n [h(X_i) - E_\delta(h(X_i)|X_{i-1})]\right)$ gilt

$$0 \leq E_\delta\left(\sum_{i=1}^n \left(h(X_i) - h(X_{i-1}) - \frac{g-r(X_{i-1})}{\lambda_{X_{i-1}}} + \sum_{j=0}^{N} P(X_i^- = j|X_{i-1}) d(j,\delta(j))\right)\right)$$

$$0 \leq \frac{E_\delta(h(X_n) - E_\delta(h(X_0))}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_{X_{i-1}}}} - g + \frac{E_\delta\left(\sum_{i=1}^n \frac{r(X_{i-1})}{\lambda_{X_{i-1}}} + \sum_{j=0}^N P(X_i^- = j|X_{i-1}) d(j,\delta(j))\right)}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_{X_{i-1}}}}.$$

Auf Grund der Beschränktheit von h und $\frac{1}{\lambda_{X_{i-1}}} > c \ \forall i \in I\!N$ verschwindet der erste Term mit $n \to \infty$. Des weiteren gilt mit der bei den diskontierten Kosten definierten Zufallsvariablen τ:

$$E(r(X_n)\tau_{n+1})|X_n = i) = r(i) \cdot E(\tau(i)) = \frac{r(i)}{\lambda_i}, \text{ also } E\left(r(X_n)\tau_{n+1}|X_n\right) = \frac{r(X_n)}{\lambda_{X_n}}$$

$$\Rightarrow \quad E_\delta(r(X_n)\tau_{n+1}) = E_\delta(E(r(X_n)\tau_{n+1})|X_n) = E_\delta\left(\frac{r(X_n)}{\lambda_{X_n}}\right). \quad \text{Somit gilt}$$

$$g \leq \frac{E_\delta(h(X_n)) - E_\delta(h(X_0))}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_{X_{i-1}}}}$$

$$+\frac{E_\delta\left(\sum_{i=1}^n r(X_{i-1})\tau_i + \sum_{j=0}^N P(X_i^- = j|X_{i-1}) d(j,\delta(j))\right)}{E_\delta\left(\sum_{i=1}^n \tau_i\right)} \overset{n\to\infty}{\to} \phi_\delta(X_0)$$

und erneut Gleichheit im Fall $\delta = \delta^*$.

Beim Beweis von (2) fällt der Ungleichungsschritt des obigen Beweises heraus, so daß im nachfolgenden Teil nur die Ungleichungen in Gleichungen umgeformt zu werden brauchen. Der Beweis von (1) ergibt auch hier nach jedem Austausch der Menge $\{0,...,j\}$ durch die Menge $\{0,j\}$ den Beweis von (3). ■

Satz 64 *(1) Wenn es ein $M < \infty$ gibt, mit $|V_\alpha(i) - V_\alpha(0)| < M \quad \forall\alpha \in (0,1) \forall i \in I$, dann existiert eine stationäre Durchschnittskosten-optimale Strategie, und es gilt $\phi = \lim_{\alpha\uparrow 1}(-\ln\alpha)V_\alpha(0)$.*

(2) Wenn es ein $M < \infty$ gibt, mit $|V_\alpha^b(i) - V_\alpha^b(0)| < M \quad \forall\alpha \in (0,1) \forall i \in I$, dann existiert eine Strategie die Durchschnittskosten-optimal in der Klasse der bang-bang

Strategien ist, und es gilt $\phi^b = \lim_{\alpha\uparrow 1}(-\ln\alpha)V_\alpha^b(0)$.
(3) Wenn es ein $M < \infty$ *gibt, mit* $|V_{\alpha,\delta}(i) - V_{\alpha,\delta}(0)| < M \quad \forall\alpha \in (0,1) \forall i \in I$, *dann gilt* $\phi_\delta = \lim_{\alpha\uparrow 1}(-\ln\alpha)V_{\alpha,\delta}(0)$.

Der **Beweis** des ersten Teils dieses Satzes ist eine Übertragung des Beweises von Satz 18: Hier wird in der Optimalitätsgleichung nach Multiplikation mit dem Faktor $\frac{\lambda_i - \ln\alpha}{\lambda_i}$ der Term $V_\alpha(0)$ subtrahiert, und es ergibt sich mit der gleichen Funktion $h_\alpha(i) := V_\alpha(i) - V_\alpha(0)$:

$$\frac{\lambda_i - \ln\,\alpha}{\lambda_i} h_\alpha(i) = \frac{r(i)}{\lambda_i - \ln\,\alpha} - \frac{-\ln(\alpha)V_\alpha(0)}{\lambda_i} + \sum_{j=i}^{N} p_{ij} \min_{a\in\{0,\dots,j\}} \{d(j,a) + h_\alpha(j-a)\}\,.$$

Wegen der Beschränktheit kann man auch hier mit dem Cauchschen Diagonalisierungsverfahren eine Folge $(\alpha_n)_{n\in N}$ konstruieren, so daß $g := \lim_{n\to\infty}(-(\ln\,\alpha_n)V_{\alpha_n}(0))$ und $h := \lim_{n\to\infty} h_{\alpha_n}$ existieren, die die Voraussetzung des letzten Satzes erfüllen. Die Identität $\phi = \lim_{\alpha\uparrow 1}(-\ln\alpha)V_\alpha$ ergibt sich genauso wie beim ersten Modell. Unter Verwendung der Funktion $h^b(i) := V_\alpha^b(i) - V_\alpha^b(0)$ läßt sich auch der zweite Teil analog beweisen. Die Tatsache der analogen Beweisführung trifft auch auf die dritte Aussage des Satzes zu. ■

Im ersten Modell gilt die Identität $\phi = \lim_{\alpha\uparrow 1}(1-\alpha)V_\alpha(0)$ bzgl. der dort verwendeten Funktionen. Hier ist $\phi = \lim_{\alpha\uparrow 1}(-\ln\alpha)V_\alpha(0)$. Dieser Unterschied ist allerdings nicht wesentlich, da die Taylorentwicklung der Funktion $-\ln(\alpha)$ in 1 die Identität $-\ln(\alpha) = 1 - \alpha + o((1-x)^2)$ ergibt.

Auch in diesem System haben der folgende Satz und das anschließende Korollar Geltung:

Satz 65 *Ist eine der folgenden zwei Bedingungen erfüllt, dann ist die Existenz einer stationären Durchschnittskosten-optimalen Strategie gesichert:*
(I) Der Zustandsraum ist endlich.
(II) Die Bedingungen $(0),\dots,(3)$ *sind erfüllt.*

Korollar 18 *Unter den Voraussetzungen* (I) *oder* (II) *von Satz 65 gilt unter Verwendung der Funktionen* h *und* h^b*:*

1. *Die Strategie* δ^* *mit* $d(i,\delta^*(i)) + h(i-\delta^*(i)) = \min_{a\in\{0,\dots,i\}}\{d(i,a) + h(i-a)\}\ \forall i \in I$ *minimiert die Durchschnittskosten in der Klasse* Π_1.

2. *Die Strategie* δ_b^* *mit* $d(i,\delta_b^*(i)) + h^b(i-\delta_b^*(i)) = \min_{a\in\{0,i\}}\{d(i,a) + h(i-a)\}\ \forall i \in I$ *minimiert die Durchschnittskosten in der Klasse* Π_1^b.

Satz 66 *Bei endlichem Zustandsraum $I_N = \{0, ..., N\}$ und unter der Bedingung, daß alle Größen p_{iN} ungleich Null sind, kann auch in diesem Modell ein Zusammenhang zwischen der Durchschnittskostenfunktion und der erwarteten diskontierten Kostenfunktion eines veränderten Systems hergestellt werden:*
Für jedes $\tilde{c} > \frac{1}{\min_{\{i \in I_N\}}\{\lambda_i p_{iN}\}}$ gelten die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned}
(1)\quad \phi(i) &= \frac{1}{\tilde{c}} \min_{\{a \in I_N\}} \{d(N,a) + \tilde{V}_\alpha(N-a)\},\\
(2)\quad \phi^b(i) &= \frac{1}{\tilde{c}} \min_{\{a \in \{0,N\}\}} \{d(N,a) + \tilde{V}^b_\alpha(N-a)\},\\
(3)\quad \phi_\delta(i) &= \frac{1}{\tilde{c}}(d(N,\delta(N)) + \tilde{V}_{\delta,\alpha}(N-\delta(N))).
\end{aligned}$$

Hier ist $\tilde{V}_{\delta,\alpha}$ die Wertfunktion des Systems mit den Größen

$$\begin{aligned}
\tilde{\lambda}_i &= \ln \alpha (1 - \tilde{c}\lambda_i)\\
\tilde{r}_i &= \frac{\tilde{\lambda}_i}{\lambda_i} \left(\frac{\lambda_i - \ln \alpha}{\tilde{\lambda}_i} \right)^2 r(i)\\
\tilde{d} &= d\\
\tilde{p}_{ij} &= \left(\frac{\tilde{\lambda}_i - \ln \alpha}{\tilde{\lambda}_i} + 1_{\{j=N\}} \frac{\ln \alpha}{\tilde{\lambda}_i p_{ij}} \right) p_{ij}
\end{aligned}$$

Beweis: Für $j < N$ sind die Werte $\tilde{p}_{ij}$ mit $j < N$ größer als die Werte p_{ij} und somit nicht-negativ. Die Nicht-Negativität von $\tilde{p}_{iN}$ ergibt sich wegen $\tilde{c}\lambda_i = \frac{\tilde{\lambda}_i}{-\ln \alpha} + 1$ aus $p_{iN} \geq \frac{1}{\tilde{c}\lambda_i} = \frac{-\ln \alpha}{\tilde{\lambda}_i - \ln \alpha}$ $\forall i \in I_N$:

$$\tilde{p}_{iN} = \frac{\tilde{\lambda}_i - \ln \alpha}{\tilde{\lambda}_i} p_{iN} + \frac{\ln \alpha}{\tilde{\lambda}_i} \geq \frac{\tilde{\lambda}_i - \ln \alpha}{\tilde{\lambda}_i} \frac{-\ln \alpha}{\tilde{\lambda}_i - \ln \alpha} + \frac{\ln \alpha}{\tilde{\lambda}_i} = 0.$$

Wegen $\sum_{j=i}^N \tilde{p}_{ij} = 1$ und somit $\tilde{p}_{ij} \leq 1$ handelt es sich bei den $\tilde{p}_{ij}$ um Übergangswahrscheinlichkeiten. Als nächstes wird die Optimalitätsgleichung von $\tilde{V}_\alpha$ betrachtet:

$$\tilde{V}_\alpha(i) = \frac{\tilde{\lambda}_i}{(\tilde{\lambda}_i - \ln \alpha)^2} \tilde{r}(i) + \frac{\tilde{\lambda}_i}{(\tilde{\lambda}_i - \ln \alpha)} \sum_{j=i}^N \tilde{p}_{ij} \min_{\{a \in I_N\}} \left\{ \tilde{d}(j,a) + \tilde{V}_\alpha(j-a) \right\}$$

$$= \frac{r(i)}{\lambda_i} + \sum_{j=i}^N p_{ij} \min_{\{a \in I_N\}} \left\{ d(j,a) + \tilde{V}_\alpha(j-a) \right\} + \frac{\tilde{\lambda}_i}{\tilde{\lambda}_i - \ln \alpha} \frac{\ln \alpha}{\tilde{\lambda}_i} \min_{\{a \in I_N\}} \left\{ d(j,a) + \tilde{V}_\alpha(N-a) \right\}$$

$$= \frac{r(i)}{\lambda_i} - \frac{-\ln \alpha}{\tilde{\lambda}_i - \ln \alpha} \min_{\{a \in I_N\}} \{d(N,a) + \tilde{V}_\alpha(N-a)\} + \sum_{j=i}^N p_{ij} \min_{\{a \in I_N\}} \{d(j,a) + \tilde{V}_\alpha(j-a)\}$$

$$= \frac{r(i)}{\lambda_i} - \frac{\tilde{c}^{-1}}{\lambda_i} \min_{\{a \in I_N\}} \{d(N,a) + \tilde{V}_\alpha(N-a)\} + \sum_{j=i}^N p_{ij} \min_{\{a \in I_N\}} \{d(j,a) + \tilde{V}_\alpha(j-a)\}.$$

Die erste Aussage dieses Satzes folgt nun aus Satz 63(1) mit der auf I_N beschränkten Funktion $h = V_\alpha$ und $g = \frac{1}{\tilde{c}} \min_{\{a \in I_N\}} \{d(N,a) + \tilde{V}_\alpha(N-a)\}$. Der zweite Teil folgt wieder analog nach Austauschen der Menge I_N durch die Menge $\{0, N\}$ unter Verwendung des entsprechenden zweiten Teiles von Satz 63. Um den dritten Teil zu beweisen, werden die entsprechende Funktionalgleichung für $V_{\delta,1-\alpha}$ und der dritte Teil von Satz 63 verwendet. ■

Das letzte Lemma entspricht dem Lemma 13 des Abschnittes *Der allgemeine Zustandsraum ($N < \infty$ oder $N = \infty$)* des ersten Modells. Alle anderen in diesem Abschnitt gemachten Aussagen gelten unverändert auch hier, da sie von der Unterscheidung beider Modelle unbeeinflußt bleiben. Auch die Berechnung der optimalen Strategie im Fall des endlichen Zustandsraumes durch den angegebenen Algorithmus ist nahezu identisch, bis auf die Tatsache, daß bei den Durchschnittskosten die Verweildauer in einem Zustand berücksichtigt werden muß. Hier sind also im Zustand $i \in I_N$ unter Verwendung der Aktion $a \in A$ die Kosten des nächsten Zeitintervalls durch die Länge dieses Zeitintervalls zu teilen. Die zu minimierenden Durchschnittskosten sind dann

$$\frac{\sum_{i=0}^{N}\sum_{a=0}^{i}\pi_{ia}(d(i,a)+E\tau(i-a)r(i-a))}{E(\tau(i-a))} = \sum_{i=0}^{N}\sum_{a=0}^{i}\pi_{ia}(\lambda_{i-a}d(i,a)+r(i-a)).$$

Die Minimierungsbedingungen bleiben unverändert. Der Simplex-Algorithmus liefert auf die gleiche Weise die optimale Strategie.

Der allgemeine Zustandsraum ($N = \infty$ oder $N < \infty$)

Unter Verwendung der Definition 4, $M(N)$ aus dem Beweis von Lemma 13 und den Zufallsvariablen c und S^δ mit $c(X_n) := \tau_n r(X_n) + d\left(X_{n+1}^-, X_{n+1}^-\right)$ und $S^\delta(i) := T_{\tau^\delta(i)}$ ergibt sich das

Lemma 46 *Aus $\cap_{i\in I} K_i^\delta \neq \emptyset$ folgt für $j \in \cap_{i\in I} K_i^\delta$ und $i \in I$:*

$$\phi_\delta(i) = \lim_{N\to\infty} \frac{E_\delta\left(\sum_{k=0}^{N} c(X_k)\middle| X_0 = i\right)}{E_\delta(T_N|X_0 = i)} = \frac{E_\delta\left(\sum_{n=0}^{\tau^\delta(j)-1} c(X_n)\middle| X_0 = j\right)}{E(S^\delta(j)|X_0 = j)},$$

so daß ϕ konstant ist.

Als Ergänzung sei hier schon erwähnt, daß im Fall des endlichen Zustandraumes I_N im noch folgenden fünften Kapitel am Anfang die Funktion S_δ eingeführt wird, für die die folgende Identität bewiesen wird:

$$E(S^\delta(0)|X_0 = 0) = E(S_\delta(0)) = \frac{1}{\pi(0)}\sum_{k=0}^{N}\frac{\pi(k)}{\lambda_k}.$$

Dabei ist π die stationäre Verteilung des Prozesses X^δ. Bei dem Beweis kann ohne Weiteres auf beiden Seiten der Gleichung der Zustand 0 durch den im Lemma angeführten Zustand j ausgetauscht werden. Somit kann der Nenner in der Aussage des Lemmas auf der rechten Gleichungsseite durch den Term $\frac{1}{\pi(j)}\sum_{k=0}^{N}\frac{\pi(k)}{\lambda_k}$ ausgetauscht werden.

Nun folgt der **Beweis** des Lemmas. Es sei dabei noch einmal auf den Unterschied zwischen den Zufallsvariablen τ_k und $\tau_k(j)$ hingewiesen:

$$\begin{aligned}
E_\delta\left(\sum_{n=0}^{N} c(X_n)\middle| X_0 = i\right) &= (E_\delta(M(N))-1)^+ E_\delta\left(\sum_{n=\tau_1^\delta(j)}^{\tau_2^\delta(j)-1} c(X_n)\middle| X_0 = i\right)\\
&\quad + E_\delta\left(\sum_{n=0}^{\tau^\delta(j)-1} c(X_n)\middle| X_0 = i\right) + E_\delta\left(\sum_{n=\tau^\delta_{M(N)}(j)}^{N} c(X_n)\middle| X_0 = i\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{mit } 0 &\leq E_\delta\left(\sum_{n=0}^{\tau^\delta(j)-1} c(X_n)\middle| X_0 = i\right) \leq E_\delta\left(\sum_{n=0}^{\tau^\delta(j)-1} (C+\tau_{n+1}\cdot C)\middle| X_0 = i\right)\\
&= E_\delta\left(\tau^\delta(j)\cdot C + T_{\tau^\delta(j)}\cdot C\middle| X_0 = i\right)\\
&= C\left(E_\delta\left(\tau^\delta(j)\middle| X_0 = i\right) + E_\delta\left(T_{\tau^\delta(j)}\middle| X_0 = i\right)\right)\\
\text{und } 0 &\leq E_\delta\left(\sum_{n=\tau^\delta_{\tau_{M(N)}}(j)}^{N} c(X_n)\middle| X_0 = i\right) \leq E_\delta\left(\sum_{n=\tau^\delta_{\tau_{M(N)}}(j)}^{\tau^\delta_{\tau_{M(N)+1}}(j)} c(X_n)\middle| X_0 = i\right)\\
&= E_\delta\left(\sum_{n=0}^{\tau^\delta(j)-1} c(X_n)\middle| X_0 = j\right)\\
&\leq E_\delta\left(\sum_{n=0}^{\tau^\delta(j)-1} (C+\tau_{n+1}\cdot C)\middle| X_0 = j\right)\\
&= C\left(E_\delta\left(\tau^\delta(j)\middle| X_0 = j\right) + E_\delta\left(T_{\tau^\delta(j)}\middle| X_0 = j\right)\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Deshalb gilt } E_\delta\left(\sum_{n=0}^{N} c(X_n)\middle| X_0 = i\right) &= \sum_{k=1}^{M(N)-1} E_\delta\left(\sum_{n=\tau_k^\delta(j)}^{\tau_{k+1}^\delta(j)-1} c(X_n)\middle| X_0 = i\right) + d\\
&= \sum_{k=1}^{M(N)-1} E_\delta\left(\sum_{n=0}^{\tau^\delta-1} c(X_n)\middle| X_0 = j\right) + d\\
&= E_\delta(M(N)-1)E_\delta\left(\sum_{n=0}^{\tau^\delta-1} c(X_n)\middle| X_0 = j\right) + d
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{mit } 0 \leq d &\leq C\Big[E_\delta\left(\tau^\delta(j)\middle| X_0 = i\right) + E_\delta\left(\tau^\delta(j)\middle| X_0 = j\right)\\
&\qquad + E_\delta\left(T_{\tau^\delta(j)}\middle| X_0 = i\right) + E_\delta\left(T_{\tau^\delta(j)}\middle| X_0 = j\right)\Big]\\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Nun wird der Nenner der Durchschnittskosten-Funktion beschrieben:

$$\begin{aligned}
E_\delta\left(T_N|X_0=i\right) &= E_\delta\left(\sum_{k=1}^{M(N)-1}\left(T_{\tau_{k+1}(j)}-T_{\tau_k(j)}\right)\Big|\, X_0=i\right)\\
&\quad +E_\delta\left(T_{\tau(j)}\Big|\, X_0=i\right)+E_\delta\left(T_N-T_{\tau_{M(N)}}\Big|\, X_0=i\right)\\
&= E_\delta\left(\sum_{k=1}^{M(N)-1}\left(T_{\tau_{k+1}(j)}-T_{\tau_k(j)}\right)\Bigg|\, X_0=j\right)\\
&\quad +E_\delta\left(T_{\tau(j)}\Big|\, X_0=i\right)+E_\delta\left(T_N-T_{\tau_{M(N)}}\Big|\, X_0=i\right)\\
&= E_\delta(M(N)-1)E\left(S^\delta(j)\Big|\, X_0=j\right)+\tilde d\\
\text{mit}\quad 0\ \le\ \tilde d &= E_\delta\left(T_{\tau(j)}\Big|\, X_0=i\right)+E_\delta\left(T_N-T_{\tau_{M(N)}}\Big|\, X_0=i\right)\\
&\le E_\delta\left(T_{\tau(j)}\Big|\, X_0=i\right)+E_\delta\left(T_{\tau_{M(N)+1}}-T_{\tau_{M(N)}}\Big|\, X_0=i\right)\\
&= E_\delta\left(S^\delta(j)\Big|\, X_0=i\right)+E_\delta\left(S^\delta(j)\Big|\, X_0=j\right)\\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Für die Durchschnittskostenfunktion ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\phi_\delta &= \lim_{N\to\infty}\frac{E_\delta\left(\sum_{k=0}^{N}c(X_k)\Big|\, X_0=i\right)}{E_\delta(T_N|X_0=i)}\\
&= \lim_{N\to\infty}\frac{E_\delta(M(N)-1)E_\delta\left(\sum_{n=0}^{\tau^\delta(j)-1}c(X_n)\Big|\, X_0=j\right)+d}{E_\delta(M(N)-1)E(S^\delta(j)|X_0=j)+\tilde d}\\
&= \frac{E_\delta\left(\sum_{n=0}^{\tau^\delta(j)-1}c(X_n)\Big|\, X_0=j\right)}{E(S^\delta(j)|X_0=j)}
\end{aligned}$$

wegen $\lim_{N\to\infty}E_\delta(M(N)-1)=\infty$ und $0\le d,\ \tilde d<\infty$. ■

Ebenfalls von dem ersten Modell übernommen werden kann das folgende Resultat. Die Bedingung $\sup_{\{i\in I\}}\{p_{i\,i}\}<1$ ist i. a. erfüllt, weil man in diesem Modell in der Regel die Bedingung voraussetzt, daß die Wahrscheinlichkeiten p_{ii} verschwinden.

Korollar 19 *Unter der Voraussetzung* $\sup_{i\in I}\{p_{i\,i}\}<1$ *gilt:*
ϕ_δ ist konstant für jede bang-bang Strategie δ mit Schwellenwert.

Die nun folgenden, zentralen Sätze des ersten Modells gelten genauso auch bei diesem Modell. Dasselbe gilt auch für die Beweise, bei denen lediglich die Größe α_n weggelassen werden muß, falls sie als Faktor auftritt. Daher mutiert der Term $\alpha_n\left(V_{\alpha_n}(j)-V_{\alpha_n}(0)\right)$ zu $\left(V_{\alpha_n}(j)-V_{\alpha_n}(0)\right)$.

Satz 67 *Unter den Bedingungen* $(1),\ldots,(3)$ *gibt es eine wachsende Folge* $(\alpha_n)_{n\in N}$*, so daß* $i^*:=\lim_{n\to\infty}i^*_{\alpha_n}$ *und* $\lim_{n\to\infty}\left(V^b_{\alpha_n}(j)-V^b_{\alpha_n}(0)\right)$ *existieren. Außerdem ist* $i^*\le\tilde i^*:=$

$\min\left\{j\in I{:}\lim_{n\to\infty}\left(V^b_{\alpha_n}(j)-V^b_{\alpha_n}(0)\right)>d(j,j)-d(j,0)\right\}$ $(\min\emptyset:=\infty)$. *In der Unterklasse der bang-bang Strategien minimieren diejenigen mit Schwellenwert* $\{i^*,i^*+1,...,\tilde{i}^*\}$ *die Durchschnittskosten. Wenn* i^* *unendlich ist, gilt dies auch dann, wenn die folgende Bedingung für jedes* $i\in I$ *erfüllt ist:*
$p_{ii}\neq 1$, *und es gibt eine endliche Menge* A_i, *so daß* $p_{ij}=0\ \forall j\notin A_i$ *gilt.*

Satz 68 *Wenn die Bedingungen* $(1),...,(7)$ *erfüllt sind, minimieren die bang-bang Strategien mit den Schwellenwerten* $\{i^*,\ i^*+1,...,\tilde{i}^*\}$ *die Durchschnittskosten mit*
$\tilde{i}^*=\min\{j\in I:\lim_{n\to\infty}(V_{\alpha_n}(j)-V_{\alpha_n}(0))>d(j,j)-d(j,0)\}$. $(\min\emptyset:=\infty)$.
Wenn i^* *gleich unendlich ist, gilt diese Aussage ebenfalls unter der folgenden Bedingung für jedes* $i\in\mathbb{Z}^+$: $p_{ii}\neq 1$, *und es existiert eine endliche Menge* A_i, *so daß* $p_{ij}=0\ \forall j\notin A_i$ *gilt.*

Korollar 20 *Unter den Bedingungen* $(1),...,(7)$ *ist die Durchschnittskosten-optimale Wertfunktion* ϕ *konstant.*

5.3 Beispiele

In diesem Abschnitt werden Ergebnisse von konkreten Beispielen vorgestellt, die mit einem C-Programm ermittelt wurden. Die Klassen der Reparaturkosten und Übergangswahrscheinlichkeiten werden von den Beispielen des ersten Modells übernommen. Allerdings wird die Wahl des ϵ auf $[0,\frac{1}{2}]$ eingeschränkt. Daß Bedingung (5) erfüllt ist, wurde bei $\omega=0.01$ am Rechner überprüft. Allerdings gilt die Konkavität nicht im Punkt $i=1$. Bei den anderen Werten für ω ist Bedingung (5) nicht unbedingt erfüllt, die zweite Ableitung dieser Funktion ist zwar positiv, aber sehr klein. Die ermittelte optimale Strategie ist ebenfalls eine bang-bang Strategie, so daß diese *schwache* Konvexität ebenso wenig gestört hat wie die fehlende Konkavität im Punkt 1 bei $\omega=0.01$. Des weiteren sei zunächst $\lambda(i)=(a_0\cdot i)^\omega$ für ein $\omega\in[0,1-2\epsilon]$ und alle $i\in\mathbb{Z}^+$. Nun ist noch die Bedingung (6) zu überprüfen:

$$g_k(i):=\frac{\lambda_i}{\lambda_i-\ln\alpha}\sum_{j=k}^\infty p_{ij}=\begin{cases}\frac{(a_0\cdot i)^\omega}{(a_0\cdot i)^\omega-\ln\alpha}\left(\frac{i}{k}\right)^\epsilon & i\leq k,\\ \frac{(a_0\cdot i)^\omega}{(a_0\cdot i)^\omega-\ln\alpha} & i\geq k;\end{cases}$$

$$g_k(x):=\begin{cases}\frac{(a_0\cdot x)^\omega}{(a_0\cdot x)^\omega-\ln\alpha}\left(\frac{x}{k}\right)^\epsilon & \forall x\in[0,k]\\ \frac{(a_0\cdot x)^\omega}{(a_0\cdot x)^\omega-\ln\alpha} & \forall x\in[k,\infty)\end{cases}\quad\text{sei die stetige Fortsetzung auf } \mathbb{R}^+.$$

Es ist also $g_k(x)=\frac{x^{\omega+\epsilon}}{x^\omega+\tilde{c}}\left(\frac{1}{k}\right)^\epsilon$ mit $\tilde{c}:=\frac{-\ln\alpha}{a_0^\omega}>0$ und $\epsilon:=0$, wenn $x\geq k$.

Daraus folgt $\left(\frac{1}{k}\right)^{-\epsilon}g_k(x)=x^\epsilon\left(1-\frac{\tilde{c}}{x^\omega+\tilde{c}}\right)$. Ableiten nach der Variablen x ergibt:

$$\frac{d\left(\frac{1}{k}\right)^{-\epsilon}g_k(x)}{dx}=\epsilon x^{\epsilon-1}\left(1-\frac{\tilde{c}}{x^\omega+\tilde{c}}\right)+\frac{\tilde{c}\omega x^{\epsilon+\omega-1}}{(x^\omega+\tilde{c})^2}\geq 0.$$ Erneutes Ableiten führt zu:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \left(\frac{1}{k}\right)^{-\epsilon} g_k(x)}{\partial^2 x} &= \epsilon(\epsilon-1)x^{\epsilon-2}\left(1-\frac{\tilde{c}}{x^\omega+\tilde{c}}\right)+\epsilon x^{\epsilon-1}\frac{\tilde{c}\omega x^{\omega-1}}{(x^\omega+\tilde{c})^2} \\
&\quad +\frac{(\epsilon+\omega-1)\tilde{c}\omega x^{\epsilon+\omega-2}}{(x^\omega+\tilde{c})^2}-\frac{2\tilde{c}\omega x^{\epsilon+\omega-1}(x^\omega+\tilde{c})}{(x^\omega+\tilde{c})^4} \\
&= \epsilon(\epsilon-1)x^{\epsilon-2}\left(1-\frac{\tilde{c}}{x^\omega+\tilde{c}}\right)+\frac{\tilde{c}\omega(2\epsilon+\omega-1)}{(x^\omega+\tilde{c})^2}x^{\epsilon+\omega-2}-\frac{2\tilde{c}\omega x^{\epsilon+\omega-1}}{(x^\omega+\tilde{c})^3}<0.
\end{aligned}$$

g_k ist also sowohl in $[0,k]$ als auch in $[k,\infty)$ monoton nicht-wachsend und konkav. Um die Konkavität der Folge $(g_k(i))_{i\in\mathbb{Z}^+}$ zu erzielen, muß nur noch die Beziehung $g(k+1)-2g(k)+g(k-1)\leq 0$ erfüllt sein:

$$\frac{(k+1)^\omega}{(k+1)^\omega+\tilde{c}}-\frac{2k^\omega}{k^\omega+\tilde{c}}+\frac{(k-1)^\omega}{(k-1)^\omega+\tilde{c}}\left(\frac{k-1}{k}\right)^\epsilon<\frac{(k+1)^\omega}{(k+1)^\omega+\tilde{c}}-\frac{2k^\omega}{k^\omega+\tilde{c}}+\frac{(k-1)^\omega}{(k-1)^\omega+\tilde{c}}\leq 0$$

wegen der Konkavität von $\frac{(a_0x)^\omega}{(a_0x)^\omega-\ln\alpha}$ auf $\mathbb{R}^+$. Nun wäre bei dieser Wahl aber $\lambda_0=0$, jedoch ist das nicht erlaubt. λ_0 kann so aus der Menge der positiven reellen Zahlen gewählt werden, daß gilt:

$$g_k(2)-g_k(1)=g_k(1)-\frac{l^{\omega+\epsilon}}{l^\omega+\tilde{c}}\left(\frac{1}{k}\right)^\epsilon \Rightarrow \frac{l}{l+\tilde{c}}=\frac{2}{1+\tilde{c}}-\frac{2^{\omega+\epsilon}}{2^{\omega+\tilde{c}}} \Rightarrow l=\frac{\tilde{c}\left(\frac{2}{1+\tilde{c}}-\frac{2^{\omega+\epsilon}}{2^\omega+\tilde{c}}\right)}{1-\frac{2}{1+\tilde{c}}+\frac{2^{\omega+\epsilon}}{2^\omega+\tilde{c}}}.$$

Denn so ist neben der Positivität und Monotonie ($0<l<g_k(1)$) auch die Konkavität erfüllt. Nun werden Beispiele vorgestellt. Zunächst wird der Fall a betrachtet, in dem die Voraussetzung 4a erfüllt ist, und dann der Fall b, in dem die Voraussetzung 4b erfüllt ist. Es sei bei allen Beispielen $N=100$, $\beta=0.001$, $\delta=21$, $\lambda=0.1$, $\lambda_0=0.1$, $d_{10}=20$, $d_{11}=1021$ und $\kappa=1000$ im Fall a, so daß die Bedingung $\delta\lambda-\kappa\beta 2^{\beta+1}=0.099>0$ erfüllt ist. Es sei i^* der Schwellenwert der optimalen bang-bang Strategie dieses Modells und x_0 der Schwellenwert des ersten Modells mit konstanten Inspektionsintervallen (unabhängig von ω).

α	γ	ϵ	ω	a_0	x_0	i^*	$V_\alpha(0)$	$(1-\alpha)V_\alpha(0)$
0.9	20	0.3	0.4	1.0	6	7	779	77.9
0.95	20	0.3	0.4	1.0	5	5	1629.2	81.5
0.995	20	0.3	0.4	1.0	4	3	16945	84.3
0.9999	20	0.3	0.4	1.0	4	3	851017	85.1
0.9	20	0.3	0.01	1.0	6	9	770	77.0
0.95	20	0.3	0.01	1.0	5	6	1621.2	81.1
0.995	20	0.3	0.01	1.0	4	3	16929	84.6
0.9999	20	0.3	0.01	1.0	4	3	850286	85.0
0.9	20	0.01	0.4	1.0	55	8	981.9	98.1
0.95	20	0.01	0.4	1.0	52	5	2024.7	101.2
0.995	20	0.01	0.4	1.0	49	3	20841	104.2
0.9999	20	0.01	0.4	1.0	49	3	$1.05 \cdot 10^6$	104.6
0.9	20	0.01	0.01	1.0	53	10	981.4	98.1
0.95	20	0.01	0.01	1.0	52	7	2024.2	101.2
0.995	20	0.01	0.01	1.0	49	4	20840	104.2
0.9999	20	0.01	0.01	1.0	49	4	$1.05 \cdot 10^6$	104.6
0.9	50	0.01	0.01	1.0	22	4	982.2	98.2
0.95	50	0.01	0.01	1.0	21	3	2025.2	101.3
0.995	50	0.01	0.01	1.0	20	2	20845	104.2
0.9999	50	0.01	0.01	1.0	20	2	$1.05 \cdot 10^6$	104.576
0.99999	50	0.01	0.01	1.0	20	2	$10.46 \cdot 10^7$	104.583

Als nächstes werden zahlreiche Beispiele des Falles ’b’ vorgestellt:

α	γ	ϵ	ω	κ	a_0	$\gamma\alpha - \kappa$	x_0	i^*	$V_\alpha(0)$	$(1-\alpha)V_\alpha(0)$
0.9	0.05	0.1	0.75	0.045	0.01	0	100	15	3.7	0.37
0.95	0.05	0.1	0.75	0.045	0.01	0.002	100	4	10.7	0.53
0.995	0.05	0.1	0.75	0.045	0.01	0.0048	100	1	311.2	1.6
0.9999	0.05	0.1	0.75	0.045	0.01	0.0055	100	1	22080	2.2
0.9	0.05	0.1	0.75	0.01	0.1	0.035	100	6	28.4	2.8
0.95	0.05	0.1	0.75	0.01	0.1	0.0	100	4	65.3	3.3
0.995	0.05	0.1	0.75	0.01	0.1	0.04	100	3	785	3.9
0.9999	0.05	0.1	0.75	0.01	0.1	0.04	100	3	40281	4.0
0.9	0.05	0.1	0.25	0.01	0.1	0.035	100	33	28.3	2.8
0.95	0.05	0.1	0.25	0.01	0.1	0.0	100	17	65.2	3.3
0.995	0.1	0.1	0.25	0.01	0.1	0.04	100	11	784.1	3.9
0.9999	0.1	0.1	0.25	0.01	0.1	0.04	100	10	40238	4.0
0.9	0.1	0.1	0.75	0.01	0.1	0.08	100	18	28.3	2.8
0.95	0.1	0.1	0.75	0.01	0.1	0.0	100	10	65.2	3.3
0.995	0.1	0.1	0.75	0.01	0.1	0.09	100	7	784.3	3.9
0.9999	0.1	0.1	0.75	0.01	0.1	0.09	100	7	40255	4.0
0.9	1.0	0.1	0.75	0.045	0.1	0.855	7	4	30.4	3.0
0.95	1.0	0.1	0.75	0.045	0.1	0.905	6	3	69.9	3.5
0.995	1.0	0.1	0.75	0.045	0.1	0.95	5	2	831.4	4.2
0.9999	1.0	0.1	0.75	0.045	0.1	0.955	5	2	42621	4.2
0.9	1.0	0.01	0.75	0.045	0.1	0.855	22	3	33.2	3.3
0.95	1.0	0.01	0.75	0.045	0.1	0.905	21	3	75.0	3.8
0.995	1.0	0.01	0.75	0.045	0.1	0.95	20	2	884.1	4.4
0.9999	1.0	0.01	0.75	0.045	0.1	0.955	20	2	45249	4.5
0.9	5.0	0.1	0.75	0.045	0.1	4.455	1	2	30.9	3.1
0.95	5.0	0.1	0.75	0.045	0.1	4.705	1	1	70.2	3.5
0.995	5.0	0.1	0.75	0.045	0.1	4.93	1	1	834.6	4.2
0.9999	5.0	0.1	0.75	0.045	0.1	4.954	1	1	42765	4.3
0.9	0.5	0.1	0.75	0.045	0.1	0.4	23	5	30.3	3.0
0.95	0.5	0.1	0.75	0.045	0.1	0.43	19	4	69.4	3.4
0.995	0.5	0.1	0.75	0.045	0.1	0.452	17	3	828.9	4.1
0.9999	0.5	0.1	0.75	0.045	0.1	0.455	16	3	42496	4.2
0.9	0.1	0.1	0.75	0.045	1.0	0.045	100	2	30.9	3.1
0.95	0.1	0.1	0.75	0.045	1.0	0.05	100	1	70.2	3.5
0.995	0.1	0.1	0.75	0.045	1.0	0.054	100	1	834.6	4.2
0.9999	0.1	0.1	0.75	0.045	1.0	0.055	100	1	42765	4.3

Kapitel 6

Das Ersetzungsproblem mit randomisierten Wartungszeiten

In diesem Kapitel wird das Ersetzungssystem von Kapitel 4 verallgemeinert. Es wird der Zustandsraum I von dem in Kapitel 4 untersuchten Ersetzungsmodell unverändert übernommen. Allerdings wird hier nicht von konstanten Zeitintervallen ausgegangen. Das System unterliegt genauso wie in dem letzten Modell einem shock-Prozess. Nach jedem Schock wird das System inspiziert und eventuell ersetzt. So wird hier die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Schocks als ein Zeitintervall (ZI) bezeichnet. Eine Zeiteinheit (ZE) dagegen ist eine festgelegte Zeitspanne (z.B. ein Tag). Ein Schock verursacht eine Verschlechterung des Systems, so daß für alle Zustände $i \in I$ $p_{ii} = 0$ gilt. Ansonsten erfüllen die Übergangswahrscheinlichkeiten auch die Bedingung der Markovschen Verschlechterung. Die Länge eines Zeitintervalls unterliegt der Verteilung F_i, wenn i der Zustand des System am Anfang des Zeitintervalls ist. Von allem anderen ist sie unabhängig. Erneut sei F_i die Exponentialverteilung mit Parameter λ_i, es gilt also $F_i(x) = 1 - e^{\lambda_i x}$. Die Folge $(\lambda_i)_{i\in I}$ sei hier ebenfalls durch die positive reelle Konstante c beschränkt. Die Zufallsvariablen X_n^- und X_n geben auch hier den Zustand des Systems vor bzw. nach der $n-$ten Inspektion an. Der Zustand des Systems zur Zeit t wird hier durch die Zufallsvariable $Z_\delta(t)$ beschrieben für alle reellen nicht-negativen Werte t. Die Mengen $\{\pi_\delta(0), ..., \pi_\delta(N)\}$ und $\{\tilde{\pi}_\delta(0), ..., \tilde{\pi}_\delta(N)\}$ stellen die gleichen stationären Wahrscheinlichkeiten wie in dem Modell aus Kapitel 4 dar. Da sich diese Wahrscheinlichkeiten nur aus den Übergangswahrscheinlichkeiten p_{ij} errechnen und somit unabhängig von den Verteilungen $(F_i)_{i\in I}$ sind, nehmen sie die gleichen Werte wie bei dem ersten Ersetzungsmodell an. Diese Analogie hat auch schon zwischen den Modellen der Kapitel 2 und 5 bestanden.

Der Anteil der Neuersetzungen, bei denen ein ausgefallenes System ersetzt werden darf, soll auch hier kleinergleich ϵ_0 sein. Dieses entspricht der Bedingung $\frac{\tilde{\pi}_\delta(N)}{\pi_\delta(0)} \leq \epsilon_0$ für jede verwendete Strategie δ. Somit kann als erster der Existenzsatz 45 mit $\epsilon_0 = \epsilon_1$ übernommen werden:

Satz 69 *Es existiert genau dann eine Strategie δ, die der Bedingung $\frac{\tilde{\pi}_\delta(N)}{\pi_\delta(0)} \leq \epsilon_0$ genügt, wenn gilt:*

$$p_{0N} \leq \epsilon_0.$$

Die in Kapitel 4 eingeführten post-randomisierten Strategien unterscheiden sich nur dann voneinander, wenn der Zustand des Schwellenwertes mehrfach hintereinander angenommen wird. Das ist wegen der Bedingung $p_{ii} = 0 \ \forall i \in I$ hier nur mit Wahrscheinlichkeit 0 möglich, so daß diese Unterscheidung für die folgende Theorie sinnlos geworden ist.

Auch hier ist das Hauptziel, die erwartete Zeit zwischen zwei Ersetzungen zu maximieren. Dies soll im folgenden berechnet werden: Dazu wird ebenfalls die Zufallsvariable T_n^δ benutzt, die den Zeitpunkt der $n-$ten Inspektion angibt für $n \in \mathbb{N}$ mit der Definition $T_0^\delta := 0$. τ_n^δ sei $T_n^\delta - T_{n-1}^\delta$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist hier $Z_\delta(t) = X_n^\delta$ für alle $t \in [T_n^\delta, T_{n+1}^\delta)$, so daß die Pfade von Z_δ Treppenfunktionen mit Sprüngen in den Zeitpunkten $(T_n^\delta)_{n\in\mathbb{N}}$ darstellen. Es ist $P(\tau_n \leq x | X_{n-1} = i) = F_i(x)$ unabhängig von der natürlichen Zahl n und der Strategie δ. Als nächstes seien

$$S_0^\delta(i) := \inf\left\{t \in (T_1^\delta, T_2^\delta, ...): \ Z_\delta(t) = i\right\}, \ \tilde{S}_0^\delta(i) := \inf\left\{t \in (T_1^\delta, T_2^\delta, ...): \ Z_\delta(t-) = i\right\},$$

$$S_j^\delta(i) := \inf\left\{t > S_{j-1}^\delta(i): \ Z_\delta(t) = i, \ \exists s \in (S_{j-1}^\delta(i), t): \ Z_\delta(s) \neq i\right\} - S_0^\delta(i) \text{ und}$$

$$\tilde{S}_j^\delta(i) := \inf\left\{t > \tilde{S}_{j-1}^\delta(i): \ Z_\delta(t-) = i, \ \exists s \in (\tilde{S}_{j-1}^\delta(i), t): \ Z_\delta(s) \neq i\right\} - \tilde{S}_0^\delta(i) \ \forall j \in \mathbb{N}$$

und für alle Zustände i aus I. Es gelten auch die Identitäten

$$\begin{aligned} S_j^\delta(i) &= \min_{n\in\mathbb{N}} \left\{T_n^\delta | T_n^\delta > S_{j-1}^\delta(i), \ X_n^\delta = i\right\} - S_0^\delta(i) \\ \text{und } \tilde{S}_j^\delta(i) &= \min_{n\in\mathbb{N}} \left\{T_n^\delta | T_n^\delta > \tilde{S}_{j-1}^\delta(i), \ X_n^{\delta,-} = i\right\} - \tilde{S}_0^\delta(i). \end{aligned}$$

Die Bezeichnungen $S_{...}^i(...)$ bzw. $\tilde{S}_{...}^i(...)$ stehen verkürzt für $S_{...}^{\delta_i}(...)$ bzw. $\tilde{S}_{...}^{\delta_i}(...)$. Sind die Mengen leer, wird $S_j^\delta(i)$ bzw. $\tilde{S}_\delta(i)$ gleich unendlich gesetzt. Ist jedoch $Z_\delta(t) = i \ \forall t \in \mathbb{R}^+$, dann sei $\tilde{S}_j^\delta(j) := S_j^\delta(j) := 0 \ \forall j \in \mathbb{N}$. Des weiteren sei $S_\delta(i) = S_1^\delta(i)$ und $\tilde{S}_\delta(i) = \tilde{S}_1^\delta(i)$. Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, wird auch hier aus Übersichtsgründen das δ in diesen Ausdrücken weggelassen. Die Folge $(S_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ stellt einen Erneuerungsprozess dar, bei dem jede Neuersetzung als Erneuerung angesehen wird. Außerdem sei für alle $n \in \mathbb{N}$ als m_n^δ diejenige Zufallsvariable mit Bildraum $\{n, n+1, ...\}$ definiert, für die $S_n^\delta(0) = T_{m_n^\delta}$ gilt. Dies bedeutet, daß nach der $m_n^\delta-$ten Inspektion zum $n-$ten mal ersetzt wurde. $T_{m_n^\delta}$ ist also der Zeitpunkt der $n-$ten Ersetzung unter der Strategie δ.

Aus der Identität $E(\tau_n | X_{n-1} = k) = \dfrac{1}{\lambda_k} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ k \in I$ folgt die Gleichung

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} \frac{\pi(k)}{\lambda_k} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{\lambda_k} P(X_{n-1}=k) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N} E(\tau_n | X_{n-1}=k) P(X_{n-1}=k) \\
&= \lim_{n\to\infty} E(\tau_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \tau_j = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{m_n} \tau_j}{m_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{T_{m_n}}{m_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{S_n(0)}{m_n}.
\end{aligned}$$

Außerdem gilt $\pi(0) = \lim_{n\to\infty} P(X_n = 0) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{m_n}$.

Darum ist $\frac{1}{\pi(0)} \sum_{k=0}^{N} \frac{\pi(k)}{\lambda_k} = \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(0)}{m_n}}{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{m_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n(0)}{n} = E(S_0)$.

Nun werden der Erneuerungsprozess $(\tilde{S}_n(N))_{n\in N}$ und die Zufallsvariablen $\tilde{m}_n^\delta$, die die Identität $\tilde{S}_n(N) = T_{\tilde{m}_n}$ erfüllen, betrachtet. Bei der $\tilde{m}_n^\delta-$ten Inspektion wurde also zum $n-$ten mal ein System im kritischen Zustand N vorgefunden und zwar zum Zeitpunkt $T^\delta_{\tilde{m}_n}$. Somit läßt sich genauso die folgende Identität zeigen:

$$\frac{1}{\tilde{\pi}(N)} \sum_{k=0}^{N} \frac{\pi(k)}{\lambda_k} = E(\tilde{S}(N)).$$

Das Modell kann somit mathematisch folgendermaßen formuliert werden:
Gesucht ist die Strategie δ, die den Term $\frac{1}{\pi_\delta(0)} \sum_{i=0}^{N} \frac{\pi_\delta(i)}{\lambda_i}$ maximiert und die Nebenbedingung $\frac{\tilde{\pi}_\delta(N)}{\pi_\delta(0)} \le \epsilon$ einhält.
Auch unter dem Prozeß $(Z(t),\, t \in I\!R^+)$ ist wegen der Bedingung $p_{ii} = 0\ \forall i \in I$ und der Restriktion, daß ein System im kritischen Zustand N ausgetauscht werden muß, der Zustand 0 unter Verwendung jeder Strategie $\delta \in \Pi_3$ positiv rekurrent und irreduzibel. Also ist wieder ganz I eine positiv rekurrente Klasse. Hier wird das im letzten Kapitel schon verwendete Ersetzungs-Problem mit den gleichen Kosten betrachtet:

$$d(i,0) = 0\ \forall i \in I, \quad d(i,i) = 1\ \forall i \in \{1,...,N-1\}, \quad d(N,N) = 1 + c.$$

$$\begin{aligned}
\text{Es gilt } \phi_{i^*}(c) &= \frac{1}{E(S^{i^*}(0))} + \frac{c}{E(\tilde{S}^{i^*}(N))} \\
&= \pi_{i^*}(0) \left(\sum_{j=0}^{N} \frac{\pi_{i^*}(j)}{\lambda_j} \right)^{-1} + c\tilde{\pi}_{i^*}(N) \left(\sum_{j=0}^{N} \frac{\pi_{i^*}(j)}{\lambda_j} \right)^{-1} \\
&= \left(\sum_{j=0}^{N} \frac{\pi_{i^*}(j)}{\lambda_j} \right)^{-1} (\pi_{i^*}(0) + c\tilde{\pi}_{i^*}(N)).
\end{aligned}$$

Lemma 47 *Der Ausdruck* $\frac{1}{\pi_{i^*}(j)}\sum_{i=0}^{i^*-1}\frac{\pi_{i^*}(i)}{\lambda_i}$ *ist monoton nicht-fallend in* i^* *für alle* $j \in \{0,...,N\}$ *und der Ausdruck* $\frac{1}{\tilde{\pi}_{i^*}(N)}\sum_{i=0}^{i^*-1}\frac{\pi_{i^*}(i)}{\lambda_i}$ *ist monoton nicht-wachsend in* i^*.

Beweis: Für $A, B \subset I$ sei

$$A \overset{\geq t}{\Rightarrow} B := \{Z_{\delta_\infty}(0) \in A,\ Z_{\delta_\infty}(s) \notin B\, \forall s < t, Z_{\delta_\infty}(t_0) \in B \text{ für ein } t_0 \geq t\}.$$

Außerdem sei $q_{ij}^t(i^*)$ die Wahrscheinlichkeit, daß der Prozeß $Z(t)$ unter der bang-bang Strategie mit Schwellenwert i^* nach frühestens t ZE zum ersten Mal von i nach j gelangt. Hier gilt in Anlehnung an die Beweisführung von Lemma 33 des ersten Ersetzungsmodells das Folgende:

$$\begin{aligned}
& P\left(\{i\} \overset{\geq t}{\Rightarrow} \{i^*,...,N\}\right) \ \leq\ P\left(\{i\} \overset{\geq t}{\Rightarrow} \{i^*+1,...,N\}\right) \\
\Rightarrow\ & q_{i0}^t(i^*) \leq q_{i0}^t(i^*+1) \quad \forall n \in I\!N \\
\Rightarrow\ & q_{ii}^t(i^*) = \int_{s=0}^t q_{i0}^s(i^*) P\left(Z_{\delta_\infty}(l) \neq i\ \forall l \in (s,t),\ Z_{\delta_\infty}(t) = i | Z_{\delta_\infty}(s) = 0\right)\, ds \\
& \qquad + \int_{s=t}^\infty P\left(Z_{\delta_\infty}(s) = i,\ Z_{\delta_\infty}(l) \neq i\ \forall l < s | Z_{\delta_\infty}(0) = 0\right)\, ds \\
& \qquad \leq \int_{s=0}^t q_{i0}^s(i^*+1) P\left(Z_{\delta_\infty}(l) \neq i\ \forall l \in (s,t),\ Z_{\delta_\infty}(t) = i | Z_{\delta_\infty}(s) = 0\right)\, ds \\
& \qquad + \int_{s=t}^\infty P\left(Z_{\delta_\infty}(s) = i,\ Z_{\delta_\infty}(l) \neq i)\ \forall l < s | Z_{\delta_\infty}(0) = 0\right)\, ds = q_{ii}^t(i^*+1), \\
\Rightarrow\ & \frac{1}{\pi_{i^*}(i)}\sum_{j=0}^N \frac{\pi_{i^*}(j)}{\lambda_j} = E_{\delta_{i^*}}(S(i)) = \int_{R^+} P_{\delta_{i^*}}(S(i) \geq t)\, dt = \int_{R^+} q_{ii}^t(i^*)\, dt \\
\leq\ & \int_{R^+} q_{ii}^t(i^*+1)\, dt = E_{\delta_{i^*+1}}(S(i)) = \frac{1}{\pi_{i^*+1}(i)}\sum_{j=0}^N \frac{\pi_{i^*+1}(j)}{\lambda_j}.
\end{aligned}$$

Der Ausdruck $\frac{1}{\pi_{i^*}(j)}\sum_{i=0}^{i^*-1}\frac{\pi_{i^*}(i)}{\lambda_i}$ ist somit monoton nicht-wachsend in $i^* > i$. Der zweite Teil des Lemmas resultiert aus den Ergebnissen des ersten Ersetzungsproblems, das in dieser Arbeit behandelt wurde: Nach Lemma 33 ist die Wahrscheinlichkeit $\tilde{\pi}_{i^*}(N)$ monoton nicht-fallend und der zweite Faktor monoton nicht-wachsend in i^* auf Grund der folgenden Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{i^*-1}\frac{\pi_{i^*}(i)}{\lambda_i} - \sum_{i=0}^{i^*}\frac{\pi_{i^*+1}(i)}{\lambda_i} &= \sum_{i=0}^{i^*-1}\frac{\pi_{i^*}(i)-\pi_{i^*+1}(i)}{\lambda_i} - \frac{\pi_{i^*+1}(i^*)}{\lambda_{i^*}} \\
\geq \sum_{i=0}^{i^*-1}\frac{\pi_{i^*}(i)-\pi_{i^*+1}(i)}{\lambda_{i^*}} - \frac{\pi_{i^*+1}(i^*)}{\lambda_i} &= \frac{1-(1-\pi_{i^*+1}(i^*))}{\lambda_{i^*}} - \frac{\pi_{i^*+1}(i^*)}{\lambda_{i^*}} = 0. \blacksquare
\end{aligned}$$

Lemma 48 *Es sei* $0 \leq i^* < j^*$ *und* $\phi_{\delta_{i^*}}(c_0) = \phi_{\delta_{j^*}}(c_0)$ *für ein* $c_0 \in I\!R^+$. *Dann gilt für alle* $c \in I\!R^+$:

$$\phi_{\delta_{i^*}}(c) \leq \phi_{\delta_{j^*}}(c) \quad \Leftrightarrow \quad c \geq c_0.$$

Der **Beweis** ist analog zum Beweis von Lemma 34. Es ist lediglich der Faktor $\left(\sum_{j=0}^N \frac{\pi_{i^*}(j)}{\lambda_j}\right)^{-1}$ hinzuzufügen.

Lemma 49 *Optimieren bei festem c_0 die Kontrollgrenzenstrategien mit den Schwellenwerten i^* und $j^*(> i^*)$ die Durchschnittskosten, dann gilt dies auch für alle $i \in I$: $i^* < i < j^*$.*

Beweis: Aus dem Satz 66 folgt mit der Ersetzung des Wertes α durch die Größe $\frac{\lambda_i}{\ln \alpha - \lambda_i}$ und der dort verwendeten Wertfunktion $\tilde{V}_{\delta,\alpha}$ die Identität $\phi_\delta(i) = \frac{1}{c}\left(d(N,N) + \tilde{V}_{\delta,\alpha}(0)\right)$. Aus $\phi_{\delta_{i^*}} \leq \phi_\delta$ und $\phi_{\delta_{j^*}} \leq \phi_\delta$ $\forall \delta \in \Pi_3$ folgt

$$\tilde{V}_{\delta_{i^*},\alpha}(0) \leq \tilde{V}_{\delta,\alpha}(0) \text{ und } \tilde{V}_{\delta_{j^*},\alpha}(0) \leq \tilde{V}_{\delta,\alpha}(0) \quad \forall \delta \in \Pi_3.$$

Der Rest des Beweises verläuft analog zu dem Beweis von Lemma 35. ∎

Satz 70

1. *Es existieren j_0 aus I und positive reelle Größen $c_{j_0} \geq c_{j_0+1} \geq ... \geq c_N$, so daß die Kontrollgrenzenstrategie δ_{i^*} mit folgendem Schwellenwert i^* optimal ist:*
   $i^* = N$ *falls* $0 \leq c < c_N$,
   $i^* = j$ *falls* $c_{j+1} \leq c < c_j$,
   $i^* = j_0$ *falls* $c \geq c_{j_0}$.

2. *Im Fall $p_{0N} < p_{1N}$ kann $j_0 = 1$ gewählt werden.*

Beweis: Im Fall $c = 0$ haben die Durchschnittskosten unter Verwendung der Kontrollgrenzenstrategie mit Schwellenwert i^* den Betrag $\pi_{i^*}(0)\left(\sum_{j=0}^{N} \frac{\pi_{i^*}(j)}{\lambda_j}\right)^{-1}$. Dieser sinkt nach dem ersten Lemma dieses Kapitels mit zunehmendem i^*, so daß die bang-bang Strategie mit Schwellenwert N in diesem Fall optimal ist. Der Rest des Beweises für den ersten Teil dieses Satzes kann von Satz 46 übernommen werden. Der zweite Teil des Satzes wird auch hier indirekt gezeigt: Es sei die minimal mögliche Wahl des j_0 größer als eins. Dann gilt:

$$\phi_{i^*}(c) = \pi_{i^*}(0)\left(\sum_{j=0}^{N} \frac{\pi_{i^*}(j)}{\lambda_j}\right)^{-1} + c\tilde{\pi}_{i^*}(N)\left(\sum_{j=0}^{N} \frac{\pi_{i^*}(j)}{\lambda_j}\right)^{-1} = \frac{1}{E(S^{i^*}(0))} + \frac{c}{E(\tilde{S}^{i^*}(N))}.$$

Fall 1: $E\left(\tilde{S}^{j_0}(N)\right) < E\left(\tilde{S}^1(N)\right)$:

$$\phi_{j_0}(c) - \phi_1(c) = \frac{1}{E\left(S^{j_0}(0)\right)} - \frac{1}{E\left(S^1(0)\right)} + c\left(\frac{1}{E\left(\tilde{S}^{j_0}(N)\right)} - \frac{1}{E(\tilde{S}^1(N))}\right).$$

Die Konstante c kann so groß gewählt werden, daß dieser Ausdruck positiv ist. Für genügend großes c ist also δ_1 die optimale Strategie.

Fall 2: $E\left(\tilde{S}^{j_0}(N)\right) = E\left(\tilde{S}^1(N)\right) \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{\tilde{\pi}_{j_0}(N)} \displaystyle\sum_{j=0}^{N} \frac{\pi_{j_0}(j)}{\lambda_j} = \frac{1}{\tilde{\pi}_1(N)} \sum_{j=0}^{N} \frac{\pi_1(j)}{\lambda_j}$

$$\text{Aus } \frac{1}{\tilde{\pi}_{j_0}(N)} \leq \frac{1}{\tilde{\pi}_1(N)} \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^{N} \frac{\pi_{j_0}(j)}{\lambda_j} \leq \sum_{j=0}^{N} \frac{\pi_1(j)}{\lambda_j} \text{ folgt}$$

$$\tilde{\pi}_{j_0}(N) = \ldots = \tilde{\pi}_1(N) \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^{N} \frac{\pi_{j_0}(j)}{\lambda_j} = \sum_{j=0}^{N} \frac{\pi_1(j)}{\lambda_j}.$$

Nun ist das Lemma 33 aus dem ersten Ersetzungsmodell anwendbar, da die stationären Wahrscheinlichkeiten $(\pi_\delta(i))_{i\in I}$ und $(\tilde{\pi}_\delta(i))_{i\in I}$ bei beiden Modellen identisch sind. Somit gilt:

$$\pi_1(0) = \ldots = \pi_{j_0}(0) \text{ und } \sum_{j=0}^{N} \frac{\pi_{j_0}(j)}{\lambda_j} = \sum_{j=0}^{N} \frac{\pi_1(j)}{\lambda_j}, \text{ so daß die Identität } S^{j_0}(0) = S^1(0) \text{ gilt.}$$

Da auch $\tilde{S}^{j_0}(0) = \tilde{S}^1(0)$ gilt, ist $\phi_{j_0} = \phi_1$, so daß $j_0 = 1$ wählbar ist. ∎

Zum Beweis der folgenden Sätze wird die folgende Voraussetzung benötigt:

Voraussetzung: Es gelte $p_{0N} \neq p_{1N}$.

Satz 71 *Für alle Strategien δ, die die Ungleichung $\frac{\tilde{\pi}_\delta(N)}{\pi_\delta(0)} \leq \epsilon_1$ erfüllen, existieren $i \in I$ und $p \in [0,1]$, so daß gilt:*

$$\frac{\tilde{\pi}_{(i,p)_{\text{pre}}}(N)}{\pi_{(i,p)_{\text{pre}}}(0)} = \frac{(1-p)\tilde{\pi}_{\delta_i}(N) + p\tilde{\pi}_{\delta_{i+1}}(N)}{(1-p)\pi_{\delta_i}(0) + p\pi_{\delta_{i+1}}(0)} \leq \epsilon_1 \quad \textit{und}$$

$$\pi_\delta(0)\left(\sum_{j=0}^{N} \frac{\pi_\delta(j)}{\lambda_j}\right)^{-1} = \pi_{(i,p)_{\text{pre}}}(0)\left(\sum_{j=0}^{N} \frac{\pi_{(i,p)_{\text{pre}}}(j)}{\lambda_j}\right)^{-1}.$$

Beweis: Es ist $\phi_i = \phi_{i+1} \leq \phi_\delta\ \forall \delta \in \Pi_3$. Offensichtlich sind auch hier, genauso wie in dem anderen Ersetzungsmodell, δ_1 und δ_N die Strategien, die am häufigsten bzw. am seltensten ersetzen. Darum gelten die beiden Ungleichungen

$$\left(\sum_{j=0}^{N} \frac{\pi_{\delta_1}(j)}{\lambda_j}\right)^{-1} \pi_{\delta_1}(0) = \frac{1}{E(S^1(0))} \geq \frac{1}{E(S_\delta(0))} = \left(\sum_{j=0}^{N} \frac{\pi_\delta(j)}{\lambda_j}\right)^{-1} \pi_\delta(0)$$

$$\text{und} \quad \left(\sum_{j=0}^{N} \frac{\pi_\delta(j)}{\lambda_j}\right)^{-1} \pi_\delta(0) = \frac{1}{E(S_\delta(0))} \geq \frac{1}{E(S^N(0))} = \left(\sum_{j=0}^{N} \frac{\pi_{\delta_N}(j)}{\lambda_j}\right)^{-1} \pi_{\delta_N}(0).$$

Nach dem Lemma 47 ist $\pi_{i^*}(0)\left(\sum_{j=0}^{N} \frac{\pi_{i^*}(j)}{\lambda_j}\right)^{-1}$ monoton nicht-fallend in i^*. Daher existiert ein Zustand i aus I mit

$$\pi_{i+1}(0)\left(\sum_{j=0}^{N} \frac{\pi_{i+1}(j)}{\lambda_j}\right)^{-1} \geq \pi_\delta(0)\left(\sum_{j=0}^{N} \frac{\pi_\delta(j)}{\lambda_j}\right)^{-1} \geq \pi_i(0)\left(\sum_{j=0}^{N} \frac{\pi_i(j)}{\lambda_j}\right)^{-1} \qquad \text{also}$$

$$\pi_{(i,1)_{\text{pre}}}(0)\left(\sum_{j=0}^{N} \frac{\pi_{(i,1)_{\text{pre}}}(j)}{\lambda_j}\right)^{-1} \geq \pi_\delta(0)\left(\sum_{j=0}^{N} \frac{\pi_\delta(j)}{\lambda_j}\right)^{-1} \geq \pi_{(i,0)_{\text{pre}}}(0)\left(\sum_{j=0}^{N} \frac{\pi_{(i,0)_{\text{pre}}}(j)}{\lambda_j}\right)^{-1}.$$

Da $\pi_{(i,p)_{\text{pre}}}(0)\left(\sum_{j=0}^{N}\frac{\pi_{(i,p)_{\text{pre}}}(j)}{\lambda_j}\right)^{-1}$ stetig in $p\in[0,1]$ ist, existiert aufgrund des Zwischenwertsatzes der Analysis ein p aus dem Einheitsintervall, so daß die folgende Gleichung $(*)$ erfüllt ist:

$$\pi_\delta(0)\left(\sum_{j=0}^{N}\frac{\pi_\delta(j)}{\lambda_j}\right)^{-1} = \pi_{(i,p)_{\text{pre}}}(0)\left(\sum_{j=0}^{N}\frac{\pi_{(i,p)_{\text{pre}}}(j)}{\lambda_j}\right)^{-1}.$$

Nun sei $c := c_{i+1}$ mit dieser in dem vorletzten Satz definierten Größe. Dann hat die folgende Ungleichung Geltung:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=0}^{N}\frac{\pi_{(i,p)_{\text{pre}}}(j)}{\lambda_j}\right)^{-1}\left(\pi_{(i,p)_{\text{pre}}}(0)) + c\tilde{\pi}_{(i,p)_{\text{pre}}}(N)\right) &= \phi_{(i,p)_{\text{pre}}}(c) = p\phi_{i+1}(c)+(1-p)\phi_i(c)\\ &\leq p\phi_\delta(c)+(1-p)\phi_\delta(c)=\phi_\delta(c)\\ &= \left(\sum_{j=0}^{N}\frac{\pi_\delta(j)}{\lambda_j}\right)^{-1}(\pi_\delta(0)+c\tilde{\pi}_\delta(N)).\end{aligned}$$

Aus der Gleichung $(*)$ ergibt sich $\left(\sum_{j=0}^{N}\frac{\pi_{(i,p)_{\text{pre}}}(j)}{\lambda_j}\right)^{-1}\tilde{\pi}_{(i,p)_{\text{pre}}}(N) \leq \left(\sum_{j=0}^{N}\frac{\pi_\delta(j)}{\lambda_j}\right)^{-1}\tilde{\pi}_\delta(N)$.

Dividiert man diese Ungleichung durch den Term $\pi_\delta(0)\left(\sum_{j=0}^{N}\frac{\pi_\delta(j)}{\lambda_j}\right)^{-1}$, so ergibt eine erneute Anwendung der Gleichung $(*)$ die Ungleichung $\frac{\pi_{(i,p)_{\text{pre}}}(0)}{\tilde{\pi}_{(i,p)_{\text{pre(N)}}}} \leq \frac{\pi_\delta(0)}{\tilde{\pi}_\delta(N)} < \epsilon$.

Lemma 50 *1. Für alle Strategien $(i,p)_{pre}$, $i\in I$, $p\in[0,1]$ existiert ein $q\in[0,1]$, so daß gilt:*

$$\phi_{(i,p)_{pre}}(c) \quad = \quad \phi_{(i,q)_{post}}(c) \quad \forall c\in I\!R^+.$$

2. Für alle Strategien $(i,q)_{post}$, $i\in I$, $q\in[0,1]$ existiert ein $p\in[0,1]$, so daß $\forall c\in I\!R^+$ gilt:

$$\phi_{(i,q)_{post}}(c) \quad = \quad \phi_{(i,p)_{pre}}(c) \quad mit \quad p := \frac{\frac{q}{\pi_{i+1}(0)}\sum_{k=0}^{N}\frac{\pi_{i+1}(k)}{\lambda_k}}{\frac{1-q}{\pi_i(0)}\sum_{k=0}^{N}\frac{\pi_i(k)}{\lambda_k}+\frac{q}{\pi_{i+1}(0)}\sum_{k=0}^{N}\frac{\pi_{i+1}(k)}{\lambda_k}}.$$

Beim **Beweis** von (1) kann derjenige von Lemma 36(1) übertragen werden, da sich auch hier die Stetigkeit der $(\pi_{(i,p)_{\text{post}}}(j))$ in p auf die von

$$\phi_{(i,p)_{\text{post}}}(c) = \left(\sum_{j=0}^{N}\frac{\pi_{(i,p)_{\text{post}}(j)}}{\lambda_j}\right)^{-1}\left(\pi_{(i,p)_{\text{post}}}(0)+c\tilde{\pi}_{(i,p)_{\text{post}}}(N)\right) \text{ in } p \text{ überträgt.}$$

Der Beweis von Teil (2) allerdings wird i.f. gezeigt. Unter der Wahrscheinlichkeit $P(\delta = \delta_i)$ ist die Wahrscheinlichkeit zu verstehen, daß in einem Zyklus die bang-bang Strategie mit Schwellenwert i gewählt wird. Genauso ist natürlich die Wahrscheinlichkeit $P(\delta = \delta_{i+1})$ zu verstehen.

$$\begin{aligned}
\phi_\delta(c) &= \frac{E\left(\tilde{C}^c_\delta(0, S_\delta(0))\right)}{E(S_\delta(0))} \\
\phi_{(i,q)_{\text{post}}}(c) &= \frac{E\left(\tilde{C}^c_\delta([0, S_\delta(0)])|\delta = \delta_i\right) P(\delta = \delta_i) + E\left(\tilde{C}_\delta([0, S_\delta(0)])|\delta = \delta_{i+1}\right) P(\delta = \delta_{i+1})}{E(S_\delta(0)|\delta = \delta_i)P(\delta = \delta_i) + E(S_\delta(0)|\delta = \delta_{i+1})P(\delta = \delta_{i+1})} \\
&= \frac{E\left(\tilde{C}^c_{\delta_i}([0, S_\delta(0)])\right)(1-q) + E\left(\tilde{C}^c_{\delta i+1}(0, S_\delta(0))\right) q}{\sum_{k=0}^N \frac{\pi_i(k)}{\lambda_k}\frac{1-q}{\pi_i(0)} + \sum_{k=0}^N \frac{\pi_{i+1}(k)}{\lambda_k}\frac{q}{\pi_{i+1}(0)}} \\
&= \phi_i(c)\frac{\sum_{k=0}^N \frac{\pi_i(k)}{\lambda_k}\frac{1-q}{\pi_i(0)}}{\sum_{k=0}^N \frac{\pi_i(k)}{\lambda_k}\frac{1-q}{\pi_i(0)} + \sum_{k=0}^N \frac{\pi_{i+1}(k)}{\lambda_k}\frac{q}{\pi_{i+1}(0)}} \\
&\quad +\phi_{i+1}(c)\frac{\sum_{k=0}^N \frac{\pi_{i+1}(k)}{\lambda_k}\frac{1-q}{\pi_{i+1}(0)}}{\sum_{k=0}^N \frac{\pi_i(k)}{\lambda_k}\frac{1-q}{\pi_i(0)} + \sum_{k=0}^N \frac{\pi_{i+1}(k)}{\lambda_k}\frac{q}{\pi_{i+1}(0)}} \\
&= \phi_i(c)(1-p) + \phi_{i+1}(c)p = \phi_{(i,p)_{\text{pre}}}
\end{aligned}$$

Satz 72 *Für alle Strategien δ, die die Ungleichung $\frac{\tilde{\pi}_\delta(N)}{\pi_\delta(0)} \leq \epsilon_1$ erfüllen, existieren $j \in I$ und $p \in [0,1]$, so daß gilt:*

$$\frac{\tilde{\pi}_{(j,p)_{\text{post}}}(N)}{\pi_{(j,p)_{\text{post}}}(0)} \leq \epsilon_1 \quad \textit{und} \quad \pi_\delta(0)\left(\sum_{j=0}^N \frac{\pi_\delta(j)}{\lambda_j}\right)^{-1} = \pi_{(i,p)_{\text{post}}}(0)\left(\sum_{j=0}^N \frac{\pi_{(i,p)_{\text{post}}}(j)}{\lambda_j}\right)^{-1}.$$

Beweis: Der gesamte Beweis von Satz 71 gilt auch dann, wenn man den Ausdruck $(i,p)_{\text{pre}}$ durch den Ausdruck $(i,q)_{\text{post}}$ ersetzt, mit der einzigen Änderung

$$\pi_\delta(0)\left(\sum_{j=0}^N \frac{\pi_\delta(j)}{\lambda_j}\right)^{-1} = \ldots = \phi_{(i,q)_{\text{post}}}(c) = \phi_{(i,p)_{\text{pre}}}(c) = \ldots,$$

da solch ein p nach dem letzten Lemma existiert. ∎

Konstruktion der optimalen Strategie

Mit der analogen Argumentation wie im ersten Ersetzungsproblem sind auch hier Strategien der Gestalt $(i,p)_{\text{p...}}$ zu finden, die die Ungleichung der Nebenbedingung als Gleichung erfüllen, denn die zu optimierenden Terme haben die gleichen Monotonieeigenschaften. Daher stimmen die angegebenen optimalen Strategien des ersten Modells mit denjenigen dieses Modells überein. Das hängt damit zusammen, daß die erwartete Verweildauer des Prozesses in schlechten Zuständen kürzer ist als in guten. Um möglichst selten zu ersetzen, ist auch aus diesem Grund dafür zu sorgen, daß gute Zustände bevorzugt werden. Man betrachte ein extremes Beispiel: Ist die erwartete Aufenthaltszeit im Zustand $N-1$ unendlich, dann ist sicherlich eine Strategie optimal, die im Zustand $N-1$ das System nicht ersetzt.

Schlußbemerkung zu diesem Modell

Diese Arbeit beschäftigt sich nur mit konstanten oder exponential-verteilten Aufenthaltszeiten. Nun hat es den Anschein, daß in diesem Modell die Exponentialverteilung nicht benötigt wird. Dies ist auch zutreffend. An Stelle der Exponentialverteilung mit Parameter λ_i kann wohl auch jede andere Verteilung mit Erwartungswert λ_i benutzt werden. Es muß lediglich die verlangte Monotonie der Folge $(\lambda_i)_{i\in\{0,\ldots,N\}}$ erfüllt sein. Um dies sicher behaupten zu können, muß noch ein zu Satz 66 entsprechender Satz formuliert werden, der sich nicht nur auf die Exponentialverteilung bezieht. Dies wird möglich sein, da die Eigenschaft der Exponentialverteilung in dem Beweis nicht sonderlich zum Tragen kommt. Dieser Satz wird beim Beweis von Lemma 49 benötigt.

Kapitel 7

Abschluß

7.1 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden unterschiedliche Reparatur-Modelle vorgestellt. Das erste Modell basiert – wie viele Modelle dieser Art – auf den Modellen, die schon vor fast dreißig Jahren von Derman [8] und Ross [20] behandelt wurden. Bei den vorliegenden Modellen ist allerdings die Kostenfunktion in der Art verallgemeinert worden, daß auch Teilreparieren zugelassen ist und die Kosten für die Reparatur einer Maschine außer von dem Grad der Reparatur auch von deren Zustand abhängen. Es konnte gezeigt werden, daß es unter gewissen Bedingungen – im Hinblick auf die diskontierten Kosten wie auch auf die Durchschnittskosten – günstiger ist, auf das Teilreparieren zu verzichten; denn optimal sind bang-bang Strategien mit Schwellenwert. Die Berechnung der Durchschnittskosten-optimalen Strategie bei einem nicht-endlichen Zustandsraum ist in der Literatur besonders selten anzutreffen. Im dritten Kapitel wurde das Modell weiter verallgemeinert, indem die Inspektionen nicht mehr nach äquidistanten Zeitintervallen durchgeführt wurden, sondern nach sogenannten 'shocks', an denen sich das System veränderte. In diesem Fall wurden unter veränderten Bedingungen ähnliche Ergebnisse erzielt. Außerdem wurden zwei Ersetzungsmodelle (Kapitel 3 und 5) behandelt. Dabei galt es, bei der Minimierung der durchschnittlichen (nur vorhandenen) Strafkosten die im Vorspann näher erklärte Sicherheitsschranke einzuhalten. Auch hier zeigte sich, daß eine besondere Art der bang-bang Strategien mit Schwellenwert, nämlich die hier vorgestellten randomisierten bang-bang Strategien, die Kosten minimieren. In dem Kapitel 3 sind die Inspektionszeitpunkte wieder äquidistant und in dem Kapitel 5 beruhen sie auf den gerade erwähnten 'shocks'. Interessant ist sicherlich auch das Ergebnis, daß es unter einer einfachen, praxisnahen Voraussetzung an die Verteilung der 'shocks' die gleichen Strategien sind, die beide Modelle optimieren.

7.2 Ausblick

Bei der Überlegung nach einer weiteren Behandlung dieser Modelle liegt es natürlich nahe, nach dem ersten auch bei dem zweiten Modell eine Zustandserweiterung auf einen überabzählbaren Zustandsraum vorzunehmen. Dazu sind in dieser Arbeit alle Techniken angesprochen worden.
Eine Möglichkeit, dieses Modell noch aus stochastischer Sicht zu modifizieren, besteht darin, statt diskreter Übergangswahrscheinlichkeiten Übergangswahrscheinlichkeitsfunktionen in Abhängigkeit von der Übergangszeit einzuführen. Dann stößt man auf die Theorie der Vorwärts- und Rückwärtsgleichungen. In der Praxis bedeutet dies, daß die Stärke eines 'shocks' von der Aufenthaltszeit des Systems in seinem vorherigen Zustand abhängt.

Die beiden Ersetzungsmodelle könnten natürlich insofern verallgemeinert werden, daß unter der speziellen Bedingung dieser Modelle nicht die Betriebszeiten einer Einheit maximiert werden, sondern ähnlich wie in den anderen Modellen, die Betriebskosten minimiert werden.

Literaturverzeichnis

[1] Assaf, D., Shantikumar, J. G. (1987) Optimal group maintenance policies with continous and periodic inspections. *Management Science* **33** (11), 1440-1452.

[2] Aven, T., Jensen, U. (1999) *Stochastic Models of Reliability.* Springer, New York, Berlin, Heidelberg.

[3] Barlow, R. E., Hunter, L. C. (1960) Optimum preventive maintenance policies. *Operations Research* **8**, 90-100.

[4] Bergman, B. (1985) On reliability theory and its applications. *Scandinavian Journal of Statistics* **12**, 1-41.

[5] Bertsekas, D. P., Shreve, S. E. (1978) *Stochastic Optimal Control: The Discrete Time Case.* Academic Press, New York, San Francisco, London.

[6] Cho, D. I., Parlar, M. (1991) A survey of maintenance models for multi-unit systems. *European Journal of Operational Research* **51**, 1-23.

[7] Dekker, R., Wildeman, R. E. (1997) A Review of Multi-Component Maintenance Models with Economic Dependence. *Mathematical Methods of Operations Research* **45**, 411-435.

[8] Derman, C. (1970) *Finite State Markovian Decision Processes.* Academic Press, New York and London.

[9] Douer, N., Yechiali, U. (1994) Optimal repair and replacement in Markovian systems. *Communications in Statistics, Stochastic Models* **10** (1), 253-270.

[10] Hernandez-Lerma, O., Lasserre J. B. (1996) *Discrete-Time Markov Control Processes.* Springer, New York, Berlin, Heidelberg.

[11] Heuser, H. (1981) *Lehrbuch der Analysis.* B.G. Teubner, Stuttgart.

[12] Himmelberg, C. J., Parthasarathy, T. and Van Vleck, F. S. (1976) Optimal plans for dynamic programming problems. *Mathematics of Operations Research* **1**, 390-394.

[13] Kasumu, R. A., Lesanovsky, A. (1983) An optimal replacement policy. *Aplikace Matematiky* **28**, 317-329.

[14] Kijima, M., Morimura, H., Suzuki, Y. (1988) Periodical replacement problem without assuming minimal repair. *European Journal of Operational Research* **37**(2), 194-203.

[15] Klein, M. (1961) Inspection-maintenance-replacement schedules under markovian deterioration. *Management Science* **9**, 25-32.

[16] Lesanovsky, A. (1984) An optimal replacement policy. *Statistics and Probability, Proc. 3rd Pannonian Symp., Visegrad (Ungarn) 1982* 167-181.

[17] Luss, H. (1962) Maintenance policies when deterioration can be observed by inspections. *Operations Research* **24**, 359-366.

[18] Makis, V., Jardine, A. K. S. (1992) Optimal replacement in the proportional hazards model. *Information Systems and Operations Research* **30**(1), 172-183.

[19] McCall, J. J. (1963) Operating characteristics of oppertunistic replacement an inspection policies. *Management Science* **10**, 85-97.

[20] Ross, S. M. (1983) *Introduction to Stochastic Dynamic Programming.* Academic Press, New York.

[21] Stadje, W., Zuckerman, D. (1991) Optimal maintenance strategies for repairable systems with general degree of repair. *Journal of Applied Probability* **28**, 384-396.

[22] Stadje, W., Zuckerman, D. (1996) A generalized maintenance model for stochastically deteriorating equipment. *European Journal of Operational Research* **89**, 285-301.

[23] Valdez-Flores, C., Feldman, R. M. (1989) A survey of preventive maintenance models for stochastically deteriorating single-unit systems. *Naval Research Logistics* **36**(4), 419-446.

[24] Zuckerman, D. (1980) Inspection And Replacement Policies. *Journal of Applied Probability* **17**, 168-177.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich eidesstattlich, daß ich meine Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwandt habe.

Osnabrück, den 29.05.1999