

Übungsaufgabe Verallgemeinerte Funktion

1. Bei einem in einer Ebene schwingenden Fadenpendel verlängert sich der Faden mit konstanter Rate b gemäß $l = a + bt$. Mit der Auslenkung θ gegenüber der vertikalen lässt sich die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen schreiben als

$$m(l\ddot{\theta} + 2\dot{l}\dot{\theta}) = -mg \sin \theta \quad \text{oder} \quad (a + bt)\ddot{\theta} + 2b\dot{\theta} + g\theta = 0. \quad (1)$$

Finden Sie eine allgemeine Lösung dieser Gleichung. Bestimmen Sie die spezielle Lösung für $\theta(0) = \theta_0$ und $\dot{\theta}(0) = 0$.

Hinweis: diese Aufgabe ist ein Anwendungsbeispiel für die Besselfunktion. Deren allgemeinste Darstellungsform ist

$$x^2 y''(x) + (1 - 2\alpha)xy'(x) + (\beta^2 \gamma^2 x^{2\gamma} + \alpha^2 - \nu^2 \gamma^2)y(x) = 0 \quad (2)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$y(x) = x^\alpha [c_1 J_\nu(\beta x^\gamma) + c_2 Y_\nu(\beta x^\gamma)] . \quad (3)$$

(Hinweis an die Studierenden: numerische Lösung in den MatLab-Tutorien versuchen und mit der hier gefundenen analytischen Lösung vergleichen.)